Univerzita Karlova v Praze

Přírodovědecká fakulta

Studijní program: Chemie

Studijní obor: Chemie a matematika se zaměřením na vzdělávání

Jan Břížďala

Přehled matematiky pro studium fyzikální chemie

Overview of mathematics for study of physical chemistry

Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Iva Zusková, CSc.

Konzultantka: RNDr. Kateřina Ušelová, Ph.D.

Praha 2015

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje a literaturu. Tato práce ani její podstatná část nebyla předložena k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Praze dne 3. června 2015

Abstrakt

Fyzikální chemie je disciplínou, která navazuje na poznatky z obecné chemie a pro jejíž studium je nezbytná znalost některých matematických operací. V bakalářské práci jsou prezentovány výsledky orientačního šetření, kterým byly u studentů zjišťovány znalosti vybraných témat z matematiky. Dále byl zjišťován stupeň studia, ve kterém se studenti s danými tematickými celky seznámili poprvé. Z výsledků tohoto šetření vyplynulo, že pro studenty jsou nejobtížnějšími kapitolami z matematiky právě ty, které jsou pro studium fyzikální chemie stěžejní. V další části bakalářské práce je uveden rozbor tištěných a elektronických zdrojů učiva matematiky. Nejdůležitější částí práce je samotný přehled matematických témat. Tento přehled je začleněn jak do struktury bakalářské práce, tak je rovněž přístupný přes web.

Klíčová slova: matematika - fyzikální chemie – přehled – web

Abstract

Physical chemistry is a discipline, that is related to the knowledge learned in general chemistry and there is necessary to know some mathematical operations. The bachelor work presents the results of a research, where there was investigated the knowledge of selected mathematical topics among students. Furthermore the level of schooling where the students first learned these topics was being elicited. The outcomes of this survey show that the most difficult mathematical chapters for the students are those, which are essential for physical chemistry. In the following part of the bachelor work some print and e-sources of mathematics are analysed. The crucial part of this work is the summary of mathematical topics essential for the study of physical chemistry. This summary is included in the structure of this bachelor work and it is accesible on-line too.

Key words: mathematics – physical chemistry – overview - web

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucí práce doc. RNDr. Ivě Zuskové, CSc. za cenné podněty, rady a připomínky, které mi poskytla při tvorbě této bakalářské práce. Současně bych chtěl poděkovat mé konzultantce RNDr. Kateřině Ušelové, Ph.D., která mi rovněž poskytla několik návrhů na vylepšení práce. Poděkování patří také celé mé rodině a všem mým přátelům, kteří mi byli v době psaní bakalářské práce důležitou oporou.

Obsah

1 Úvod a cíl práce 7

2 Matematické znalosti studentů fyzikální chemie................. 8

2.1 Orientační šetření.. 8

2.2 Výsledky šetření a diskuze.. 9

3 Zdroje pro studium matematiky....................................15

3.1 Tištěné učebnice.. 15

3.2 Elektronické zdroje.. 16

4 Přehled matematiky...19

Seznam použitých symbolů... 20

4.1 Základní matematické poznatky.. 21

4.1.1 Číselné obory... 21

4.1.2 Vlastnosti reálných čísel 22

4.1.3 Operace se zlomky 22

4.1.4 Mocnina a odmocnina.. 24

4.1.5 Logaritmus 27

4.1.6 Algebraické výrazy.. 27

4.2 Funkce jedné proměnné... 28

4.2.1 Definice a vlastnosti funkcí jedné proměnné.............................. 28

4.2.2 Složená a inverzní funkce 32

4.2.3 Polynomické funkce.. 33

4.2.4 Lineární lomená funkce... 38

4.2.5 Exponenciální funkce... 39

4.2.6 Logaritmická funkce.. 40

4.3 Soustavy rovnic 41

4.3.1 Sčítací metoda 42

4.3.2 Dosazovací (substituční) metoda.. 42

4.3.3 Srovnávací (komparační) metoda 43

4.4 Diferenciální a integrální počet 44
4.4.1 Okolí bodu, spojitost a limita funkce 44
4.4.2 Definice a význam derivace 45
4.4.3 Diferenciál závislé a nezávislé proměnné 48
4.4.4 Derivování funkcí 49
4.4.5 Druhá derivace 51
4.4.6 Primitivní funkce a neurčitý integrál 53
4.4.7 Integrační metody 55
4.4.8 Určitý integrál 56
4.5 Diferenciální rovnice 57
4.6 Funkce dvou proměnných 59
4.6.1 Definice a grafy funkcí dvou proměnných 59
4.6.2 Parciální derivace 60
5 Webová verze přehledu 61
6 Závěr 63
Seznam literatury 64

1 Úvod a cíl práce

Na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze je možné od akademického roku 2014/2015 absolvovat bakalářské studium chemie ve studijních oborech Biochemie, Chemie, Chemie se zaměřením na vzdělávání (jednooborová), Chemie se zaměřením na vzdělávání (dvouoborová), Chemie životního prostředí, Medicinální chemie a Klinická a toxikologická analýza. Pro většinu těchto studijních oborů lze fyzikální chemii studovat ve dvou úrovních, které se navzájem liší hodinovou dotací a počtem kreditů. V obou případech je učivo fyzikální chemie rozděleno do dvou jednosemestrálních předmětů.

Dvojice předmětů Fyzikální chemie I (a) a Fyzikální chemie II (a) je povinná pro studenty oboru Chemie. Předměty Fyzikální chemie I (b) a Fyzikální chemie II (b) jsou povinnými pro studenty oborů Biochemie, Chemie se zaměřením na vzdělávání (jednooborová), Chemie se zaměřením na vzdělávání (dvouoborová) a Medicinální chemie. Pro studenty oboru Klinická a toxikologická analýza je předmět Fyzikální chemie I (b) povinně volitelným předmětem.

Pro studium fyzikální chemie je důležitá znalost matematických pojmů, operací a postupů. Stěžejními matematickými tématy jsou funkce jedné proměnné, diferenciální a integrální počet a diferenciální rovnice. Smyslem práce je pomoci budoucím studentům předmětů fyzikální chemie s pochopením matematické podstaty probíraného učiva.

Cílem této bakalářské práce bylo vytvoření přehledu matematických poznatků, které se používají ve fyzikální chemii. Vytvořený text by měl být přístupný přes web jako PDF soubor, který je vhodný pro tisk i prohlížení. Elektronická verze přehledu by v některých případech nabízela v místě statických obrázků odkaz na interaktivní applety, které by usnadnily pochopení vysvětlované problematiky.

Jako dílčí cíl jsem si stanovil provést mezi studenty orientační šetření, které by odhalilo, na která matematická témata je třeba se zaměřit.

2 Matematické znalosti studentů fyzikální chemie

2.1 Orientační šetření

Předměty Fyzikální chemie I (b) a Fyzikální chemie II (b) jsou rozšířením učiva obecné chemie. Pro jejich studium je nezbytná znalost určitých matematických témat, například diferenciálního a integrálního počtu, metod řešení diferenciálních rovnic apod. Nezbytným základem pro pochopení těchto témat a jejich praktického použití nejen ve fyzikální chemii je znalost počítání se zlomky, řešení různých typů rovnic a nerovnic aj.

Pro orientační šetření byly vybrány tematické celky z matematiky od těch nejtriviálnějších (operace se zlomky), přes typy funkcí, rovnic a nerovnic (lineární, lineární lomené, kvadratické, exponenciální, logaritmické) až po složitější témata (matice a maticové operace, derivace a integrály, diferenciální rovnice a funkce více proměnných).

Studenti, kteří si v akademickém roce 2014/2015 zapsali předmět Fyzikální chemie I (b) a zúčastnili se první hodiny přednášky, byli požádáni o vyplnění dotazníku, ve kterém uváděli, kdy se poprvé seznámili s vybranými tematickými celky z matematiky (na základní, střední, nebo vysoké škole) a jak subjektivně hodnotí své znalosti z těchto oblastí (na klasifikační stupnici 1-5). Současně byli vyzváni, aby v dotazníku uvedli, zda absolvovali gymnázium, nebo střední školu chemického, či nechemického zaměření.

Ukázka části dotazníku je na Obr. 2.1.

Vybranou odpověď zakřížkujte!

Uveďte, jaký typ střední školy jste absolvovali:

☐ Gymnázium ☐ Střední škola chemického zaměření ☐ Střední škola nechemického zaměření

Uveďte, jakou známkou (1 = nejlepší, 5 = nejhorší) byste subjektivně ohodnotili svoji znalost daného tematického celku a v jakém stupni vzdělávání (ZŠ – SŠ – VŠ) jste se s daným tematickým celkem poprvé seznámili.

Tematický celek	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**ZŠ**	**SŠ**	**VŠ**
Operace se zlomky	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Lineární funkce	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Lineární rovnice a nerovnice	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Lineární lomená funkce	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Soustavy lineárních rovnic	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Kvadratické funkce	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Obr. 2.1 Ukázka části dotazníku.

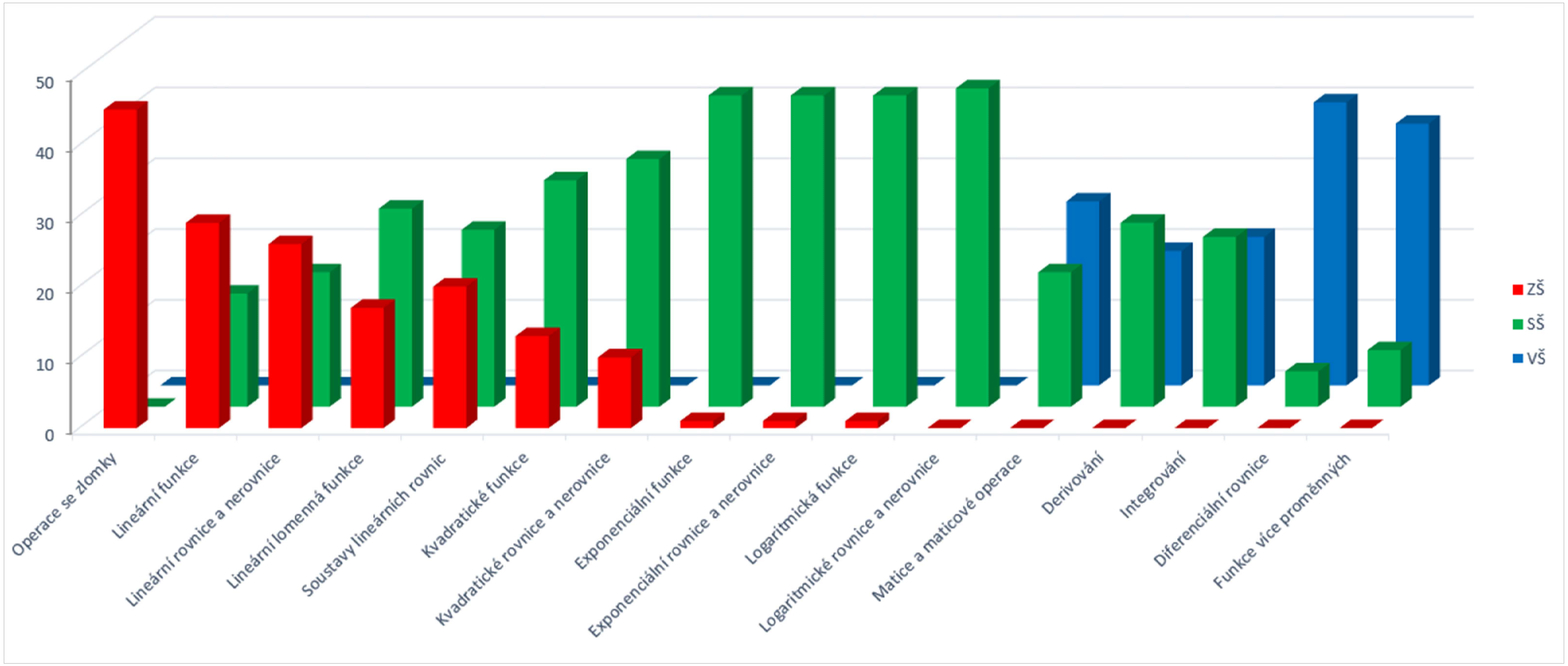
2.2 Výsledky šetření a diskuze

Dotazník vyplnilo 48 studentů, z toho 45 absolventů gymnázií, 2 absolventi střední školy nechemického zaměření a 1 absolvent střední školy chemické. Vzhledem k nízkému počtu absolventů středních škol chemického a nechemického zaměření byly dále vyhodnocovány pouze dotazníky vyplněné studenty gymnázií.

V Tab. 2.1 a na sloupcovém grafu (Obr. 2.2) je uvedena absolutní četnost jednotlivých odpovědí (počty studentů, kteří zvolili danou odpověď) týkající se zjišťování, v rámci kterého stupně vzdělávání se studenti poprvé seznámili s danými tematickými celky z matematiky.

Tab. 2.1 Přehled počtu studentů, kteří se s daným tematickým celkem z matematiky poprvé seznámili v uvedeném stupni vzdělávání (ZŠ – základní, SŠ – středoškolské, VŠ – vysokoškolské).

Tematický celek	ZŠ	SŠ	VŠ
Operace se zlomky	45	0	0
Lineární funkce	29	16	0
Lineární rovnice a nerovnice	26	19	0
Lineární lomená funkce	17	28	0
Soustavy lineárních rovnic	20	25	0
Kvadratické funkce	13	32	0
Kvadratické rovnice a nerovnice	10	35	0
Exponenciální funkce	1	44	0
Exponenciální rovnice a nerovnice	1	44	0
Logaritmické funkce	1	44	0
Logaritmické rovnice a nerovnice	0	45	0
Matice a maticové operace	0	19	26
Derivování	0	26	19
Integrování	0	24	21
Diferenciální rovnice	0	5	40
Funkce více proměnných	0	8	37



Obr. 2.2 Sloupcový graf vypovídající o počtu studentů, kteří se s daným tematickým celkem z matematiky poprvé seznámili v uvedeném stupni vzdělávání (ZŠ – základní, SŠ – středoškolské, VŠ – vysokoškolské).

Ze získaných údajů vyplývá, že se zlomky by studenti měli umět pracovat již od základní školy. Rovněž s lineárními funkcemi, lineárními rovnicemi a nerovnicemi se většina dotázaných studentů seznámila již na základní škole, menší část až na střední škole. Méně často se studenti seznámili na základní škole také s lineární lomenou funkcí a soustavami lineárních rovnic. Mezi témata, která bývají podle výsledků orientačního šetření probírána především na střední škole, výjimečně už na základní škole, patří kvadratické funkce a kvadratické rovnice a nerovnice. Podle dotázaných studentů jsou téměř výhradně středoškolskými tématy exponenciální a logaritmické funkce a exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice. Většina dotázaných studentů se již na střední škole učila derivovat a integrovat, někteří se seznámili také s maticemi a maticovými operacemi. Diferenciální rovnice a funkce více proměnných patří mezi témata, která jsou podle odpovědí studentů takřka výhradně součástí vysokoškolské matematiky.

Dále byli studenti v dotazníku požádáni o zhodnocení svých znalostí vybraných tematických celků z matematiky. Ze získaných odpovědí byla vypočtena průměrná známka (aritmetický průměr známek uvedených jednotlivými studenty), a určen modus (nejčastěji uváděná známka). Výsledky orientačního šetření jsou shrnuty v Tab. 2.2.

Tab. 2.2 Absolutní četnosti jednotlivých známek, kterými hodnotili studenti subjektivně své znalosti matematických tematických celků, průměrné známky (aritmetické průměry) a modus (nejčastěji uváděné známky).

Tematický celek	Četnosti známek					Průměrná známka	Modus
	1	2	3	4	5		
Operace se zlomky	43	2	0	0	0	1,0	1
Lineární funkce	37	8	0	0	0	1,2	1
Lineární rovnice a nerovnice	36	7	2	0	0	1,2	1
Lineární lomená funkce	27	16	2	0	0	1,4	1
Soustavy lineárních rovnic	32	12	1	0	0	1,3	1
Kvadratické funkce	33	10	2	0	0	1,3	1
Kvadratické rovnice a nerovnice	29	14	2	0	0	1,4	1
Exponenciální funkce	13	24	8	0	0	1,9	2
Exponenciální rovnice a nerovnice	13	21	11	0	0	2,0	2
Logaritmické funkce	13	18	13	0	1	2,1	2
Logaritmické rovnice a nerovnice	10	18	13	3	1	2,3	2
Matice a maticové operace	12	14	13	3	3	2,4	2
Derivování	20	16	7	2	0	1,8	1
Integrování	12	17	15	1	0	2,1	2
Diferenciální rovnice	6	14	15	5	5	2,8	3
Funkce více proměnných	8	9	22	3	5	2,9	3

Jako nejjednodušší matematické učivo studenti označili operace se zlomky, lineární, lineární lomené a kvadratické funkce, řešení lineárních a kvadratických rovnic a nerovnic a soustavy lineárních rovnic. Mezi obtížnější témata dotázaní studenti zařadili exponenciální a logaritmické funkce, exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice, derivování a integrování. Nejhorší sebehodnocení uváděli studenti u učiva matic a maticových operací, diferenciálních rovnic a funkcí více proměnných.

Jelikož dotazovaní studenti pochází z různých škol, je možné usoudit, že se učební osnovy na těchto jednotlivých školách liší. Tyto osnovy vychází ze školních vzdělávacích programů, které si každá škola sestavuje sama. Proto se někteří studenti setkali s jedním tematickým celkem již na základní škole, zatímco jiní až na gymnáziu. Ačkoliv se všichni studenti podle svých odpovědí již někdy setkali se všemi uvedenými tematickými celky z matematiky (Tab. 2.1), jsou jejich vědomosti z těchto oblastí rozdílné. K výsledkům šetření je nutné také podotknout, že každý student má individuální kritérium pro sebehodnocení, a tak stejné znalosti mohly být různými studenty odlišně klasifikovány.

Obecně je možné výsledek šetření chápat tak, že pro studenty jsou nejnáročnějšími matematickými tématy ty, které jsou pro studium fyzikální chemie zásadní a bývají často probírány až na vysokých školách.

3 Zdroje pro studium matematiky

V současné době jsou studentům k dispozici studijní materiály z matematiky v tištěné i elektronické formě. Tyto materiály se od sebe odlišují rozsahem, obsahem i formou zpracování. V této kapitole je proveden rozbor učebnicových a webových zdrojů učiva matematiky, které byly použity při tvorbě této bakalářské práce.

3.1 Tištěné učebnice

Mezi často používané učebnice matematiky na středních školách a gymnáziích patří učebnice z kolekce Matematika pro gymnázia. Pro zopakování důležitých matematických poznatků využitelných při studiu fyzikální chemie jsou vhodné díly Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice [1], Matematika pro gymnázia: funkce [2] a Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet [3]. Tyto učebnicové tituly obsahují názorně a strukturovaně uspořádané učivo daných tematických celků. Velmi přínosné je zařazení ukázkových příkladů a jejich komentované řešení. K těmto učebnicím existují i sbírky úloh, konkrétně Sbírka úloh z matematiky pro SŠ: výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy [4] a Sbírka úloh pro gymnázia: funkce [5]. Tyto příručky jsou vhodným doplňkem pro procvičování učiva funkcí, rovnic, nerovnic a jejich soustav na konkrétních příkladech.

Úspornější variantou studia rozsáhlého středoškolského učiva matematiky je využití tzv. matematických přehledů. Příkladem je Přehled středoškolské matematiky [6]. Tato příručka je přehledem v pravém slova smyslu, neboť obsahuje především teoretický výklad jednotlivých témat bez uvádění většího množství příkladů a didaktického komentáře.

Velmi názornou publikací je Matematika – přehled středoškolského učiva [7]. Navzdory malému rozsahu (240 stran) obsahuje čtivou a graficky příjemnou formou zpracovaná veškerá témata středoškolské matematiky. Celá učebnice je zpracovaná barevně a přehledně, jednotlivé tematické celky jsou doplněny vysvětlením problematiky na konkrétních příkladech. V přehledu je možné nalézt veškeré učivo, které je potřebné pro studium fyzikální chemie, s výjimkou funkcí více proměnných a diferenciálních rovnic. Tato témata však obecně nebývají součástí téměř žádných středoškolských učebnic matematiky.

Dalším přehledem středoškolské matematiky je Matematika v kostce pro střední školy [8]. Tato učební příručka poskytuje základní přehled nejdůležitějších poznatků středoškolské matematiky. Oproti předcházející studijní příručce Matematika – přehled středoškolského učiva [7] je uváděné učivo popisováno stručněji.

Pro procvičování matematických výpočtů a řešení matematických úloh existují sbírky příkladů. Mezi nejucelenější patří Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy [9].

Mezi studijní příručky matematiky použitelné při vysokoškolském studiu patří například tituly Matematické vzorce [10] nebo Přehled užité matematiky I [11] a Přehled užité matematiky II [12]. Z trojdílné kolekce příruček Základy aplikované matematiky je jako doplněk ke studiu fyzikální chemie vhodná kniha Základy aplikované matematiky I [13]. Vhodným materiálem mohou být také vysokoškolská skripta matematické analýzy, například Matematika nejen pro fyziky I [14].

Kniha Fyzikální chemie [15] obsahuje kromě samotného učiva fyzikální chemie také kapitoly pojednávající o matematických tématech. Toto učivo je zde stručně a názorně vysvětleno.

3.2 Elektronické zdroje

Mnohé studijní materiály je možné nalézt také v elektronické podobě na internetu. Mezi vhodné přehledy středoškolského učiva matematiky patří například Portál středoškolské matematiky [16], který vzniká ze závěrečných prací studentů na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze pod vedením J. Robové. Obsah portálu je postupně doplňován o další témata. V prosinci 2014 bylo na tomto portále možné nalézt tematické celky: funkce, goniometrické rovnice a nerovnice, limitu a spojitost, diferenciální počet, analytickou geometrii, posloupnosti a řady, kombinatoriku a základy logiky. Veškerá témata jsou obsažena na jednotlivých podstránkách portálu, učivo je dobře strukturované a přehledně zpracované. Velmi pozitivními vlastnostmi těchto stránek jsou didaktické poznámky a využití interaktivních appletů. Díky interaktivním prvkům je možné demonstrovat například graf funkce v závislosti na koeficientech v jejím předpisu. K ověření nabytých znalostí jsou u jednotlivých témat uvedeny testové úlohy.

Názorný přehled učiva vysokoškolské matematiky je prezentovaný na stránce Matematika online [17]. Tento web vznikl na Ústavu matematiky Fakulty strojního inženýrství Vysokého učení technického v Brně. Učivo je zde rozděleno do jednotlivých kurzů a návštěvníci webu si mohou u jednotlivých témat pročíst studijní text a řešené příklady. K dalšímu procvičení učiva lze využít neřešených příkladů. Učivo i příklady jsou na webu zveřejněny jako soubory ve formátu PDF, které je možné volně stáhnout. Jednotlivé soubory jsou psány barevně s důrazem na přehlednost a také didaktickou stránku věci (učivo je vysvětlováno jednoduchým způsobem, u řešení příkladů jsou uváděny jednotlivé kroky výpočtu apod.).

Obdobnými webovými stránkami jsou také Elektronické učebnice matematiky a fyziky [18], konkrétně kapitola Matematika SŠ, kde je možné nalézt tematicky řazené studijní texty a příklady ve formátu PDF. Tyto soubory jsou opět graficky přívětivě zpracovány. Oproti stránce Matematika online [17] je zde větší část textu věnována i středoškolskému učivu matematiky, které nemá pro studium fyzikální chemie větší význam (např. planimetrie, stereometrie či kombinatorika).

Jako užitečný přehled matematiky může také posloužit webová stránka Matematika.cz [19], na které je možné nalézt učivo nejen středoškolské, ale i vysokoškolské matematiky. Učivo je přehledně zpracováno a pro jeho lepší pochopení jsou přímo ve studijním textu zařazeny barevné grafy a schémata.

Přínosnými studijními materiály mohou být také online texty z přednášek matematické analýzy na vysoké škole. Jako příklad je možné uvést studijní text Matematická analýza I od J. Staňka [20] z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Za účelem tvorby této bakalářské práce byly dále převzaty informace z kapitoly Funkce [21] z Portálu středoškolské matematiky [16] a ze studijního materiálu Diferenciál a Taylorův polynom [22] ze stránek Matematika online [17].

4 Přehled matematiky

Tato kapitola obsahuje přehled matematiky v rozsahu, který umožňuje pochopení matematické podstaty vztahů ve fyzikální chemii. Matematická teorie je tvořena z definic jednotlivých pojmů a vlastností různých operací. V rámci kapitoly jsou tyto vlastnosti prezentovány obecně i aplikovány na konkrétních příkladech. Obecné vyjádření je zpravidla uváděno tučným písmem a umístěno v levé polovině stránky, zatímco příklady jsou situovány v pravé polovině stránky. Obrázky v kapitole objasňují vybrané matematické pojmy.

Seznam použitých symbolů

a, b	prvky a, b
A, B	množiny A, B
φ, ψ	výroky φ (fí), ψ (psí)
a^{-1}	inverzní prvek k prvku a
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou nebo se rovná množině B
$A - B$	množina A neobsahující prvky množiny B
$\{a; b\}$	množina obsahující pouze prvky a a b
$a \in A$	prvek a je prvkem množiny A
$\forall$	pro každý
$\forall a \in A$	pro každý prvek a, který je prvkem množiny A
$\forall a \in A$:	pro každý prvek a, který je prvkem množiny A, platí
$\exists$	existuje alespoň jeden
$\exists a \in A$	existuje alespoň jeden prvek a, který je prvkem množiny A
$\exists a \in A$:	existuje alespoň jeden prvek a, který je prvkem množiny A, pro který platí
$\exists!$	existuje právě jeden
$\exists!\, a \in A$	existuje právě jeden prvek a, který je prvkem množiny A
$(a; b)$	otevřený interval obsahující prvky od prvku a do prvku b mimo prvků a, b
$\langle a; b\rangle$	uzavřený interval obsahující prvky od prvku a do prvku b včetně prvků a, b
$(a;\ b\rangle$	polootevřený interval obsahující prvky od prvku a (mimo prvku a) do prvku b (včetně prvku b)
$\varphi \wedge \psi$	platí výrok φ a zároveň výrok ψ (konjunkce)
$\varphi \vee \psi$	platí výrok φ nebo výrok ψ (disjunkce)
$\varphi \Rightarrow \psi$	jestliže platí výrok φ, pak platí také výrok ψ (implikace) z výroku φ vyplývá výrok ψ
$\varphi \Leftrightarrow \psi$	výrok φ platí právě tehdy, když platí výrok ψ (ekvivalence)
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	součet prvků $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (sumace)
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	součin prvků $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$ (produkt)
$U(a)$	okolí bodu a
$U^{-}(a)$	levé okolí bodu a
$U^{+}(a)$	pravé okolí bodu a

4.1 Základní matematické poznatky

4.1.1 Číselné obory

Každé **číslo** je možné zařadit do některého **číselného oboru**. Nejběžnějšími číselnými obory jsou:

- **Přirozená čísla** jsou všechna kladná celá čísla.

  množina přirozených čísel, $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots; 100; \dots\}$

  Množina všech přirozených čísel doplněná o nulu se značí symbolem $\mathbb{N}_0$.
- **Celá čísla** jsou všechna kladná a záporná celá čísla včetně nuly.

  množina celých čísel, $\mathbb{Z} = \{\dots; -100; \dots; -1; 0; 1; \dots; 100; \dots\}$
- **Racionální čísla** jsou všechna kladná a záporná čísla včetně nuly, která lze vyjádřit ve formě zlomku p/q, kde $p, q \in \mathbb{Z}$ a $q \neq 0$.

  množina racionálních čísel, $\mathbb{Q} = \left\{\dots; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \dots; 0; \dots; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \dots\right\}$
- **Reálná čísla** jsou veškerá čísla racionální doplněná o čísla iracionální. Iracionální číslo je takové reálné číslo, které nelze zapsat ve tvaru podílu dvou celých čísel. Tato čísla mají nekonečný desetinný rozvoj bez periody, např. Ludolfovo číslo $\pi = 3{,}14159\dots$ nebo Eulerovo číslo $e = 2{,}71828\dots$.

  množina reálných čísel, $\mathbb{R} = \left\{\dots; -4; \dots; -\pi; \dots; -\frac{1}{3}; \dots; 0; \dots; e; \dots\right\}$

  Podmnožinami množiny reálných čísel, $\mathbb{R}$, jsou množiny $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^-$. Množina $\mathbb{R}^+$ zahrnuje kladná reálná čísla a množina $\mathbb{R}^-$ záporná reálná čísla.
- **Komplexní čísla** jsou veškerá čísla, která je možné zapsat v obecném tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka ($i = \sqrt{-1}$).

  množina komplexních čísel, $\mathbb{C} = \{\dots; -5 + i; \dots; -2i; \dots; 1 - 3i; \dots 7; \dots\}$

Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je podmnožinou množiny celých čísel $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$), množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je podmnožinou množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$), množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je podmnožinou množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) a množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je podmnožinou množiny komplexních čísel $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

4.1.2 Vlastnosti reálných čísel

Pro počítání s reálnými čísly platí:

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:	$\boldsymbol{a + b = b + a}$	(komutativnost sčítání)
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:	$\boldsymbol{a + (b + c) = (a + b) + c}$	(asociativnost sčítání)
$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \exists! -a \in \mathbb{R}$:	$\boldsymbol{a + (-a) = 0}$	
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:	$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$	(komutativnost násobení)
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:	$\boldsymbol{a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c}$	(asociativnost násobení)
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:	$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$	(distributivní zákon)

Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost obrazu čísla na číselné ose od nuly. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ se definuje [7, str. 21]:

Je-li $\boldsymbol{a < 0}$, pak: $\boldsymbol{|a| = -a}$

Je-li $\boldsymbol{a \geq 0}$, pak: $\boldsymbol{|a| = a}$

4.1.3 Operace se zlomky

Zlomek $\boldsymbol{a/b}$ vyjadřuje podíl libovolných dvou čísel (reálných nebo komplexních) a, b, kde $b \neq 0$; číslu $\boldsymbol{a}$ se říká **čitatel**, číslu $\boldsymbol{b}$ **jmenovatel** zlomku. [6, str. 80]

Sčítání a odečítání zlomků

Při těchto dvou operacích je třeba oba zlomky převést na společného jmenovatele.

$\forall\, a, b, c, d \; \in \; \mathbb{R} \;\; \wedge \;\; b, d \; \neq 0$:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}} \qquad \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4 + 1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}} \qquad \frac{2}{7} - \frac{1}{6} = \frac{12 - 7}{42} = \frac{5}{42}$$

Násobení zlomků

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \;\wedge\; b,d \neq 0:$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7\cdot 2}{5\cdot 3}=\frac{14}{15}$$

Dělení zlomků

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \;\wedge\; b,c,d \neq 0:$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

$$\frac{7}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{10}$$

Úprava složeného zlomku

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \;\wedge\; b,c,d \neq 0:$$

$$\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

$$\frac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{10}$$

Krácení zlomku číslem $\boldsymbol{k}$

$$\forall\, a,b,k \in \mathbb{R} \;\wedge\; b,k \neq 0:$$

$$\boldsymbol{\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{a}{b}}$$

$$\frac{3}{18}=\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

Rozšíření zlomku číslem $\boldsymbol{k}$

$$\forall\, a,b,k \in \mathbb{R} \;\wedge\; b,k \neq 0:$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{k}{k}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{5}=\frac{10}{15}$$

4.1.4 Mocnina a odmocnina

V oboru reálných čísel je možné definovat **mocninu** $\boldsymbol{a^r}$ (a na r-tou) postupně pro $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{r} = 0$, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}^-$ (záporné celé číslo) a po zavedení odmocniny také pro $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}$. [6, str. 71] Prvek $\boldsymbol{a}$ se nazývá **základ mocniny (mocněnec)** a prvek $\boldsymbol{r}$ je **mocnitel (exponent)**.

I. **Mocnina s přirozeným mocnitelem** ($\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$) je pro každé $\boldsymbol{r > 1}$ a pro každé reálné číslo $\boldsymbol{a}$ definována takto [6, str. 71]:

$\boldsymbol{a^1 = a, \quad a^r = a^{r-1} \cdot a}$	$7^1 = 7,\ \ 7^3 = 7^2 \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot 7$

Z této definice je možné odvodit vzorce pro počítání s mocninami o přirozených mocnitelích:

$\boldsymbol{a^r \cdot a^s = a^{r+s}}$	$a^2 \cdot a^3 = a^5$	$4^2 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024$
$\boldsymbol{a^r : a^s = a^{r-s}}$ (pro $\boldsymbol{r > s, a \neq 0}$)	$a^5 : a^3 = a^2$	$6^5 : 6^3 = 6^2 = 36$
$\boldsymbol{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$	$(a^5)^3 = a^{15}$	$(2^5)^3 = 2^{15} = 32768$
$\boldsymbol{(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r}$	$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 225$
$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}}$ (pro $\boldsymbol{b \neq 0}$)	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

II. **Mocnina s exponentem** $\boldsymbol{r = 0}$ je pro nenulové reálné číslo $\boldsymbol{a}$ definována jako:

$\boldsymbol{a^0 = 1}$	$(0{,}05)^0 = 1;\ \ (-5)^0 = 1$

Poté vztah $\boldsymbol{a^r : a^s = a^{r-s}}$ platí i pro $\boldsymbol{r = s}$.

Výraz $\boldsymbol{0^0}$ není definován.

III. Jestliže je **exponent $\boldsymbol{r}$ záporným celým číslem**, pak je mocnina nenulového reálného čísla $\boldsymbol{a}$ definována vztahem:

$$\boldsymbol{a^r = \frac{1}{a^{-r}}} \qquad \qquad a^{-4} = \frac{1}{a^4} \qquad \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Poté vztah $\boldsymbol{a^r : a^s = a^{r-s}}$ platí i pro $\boldsymbol{r < s}$, např.

$$a^2 : a^5 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

Odmocnina v oboru reálných čísel je definována následovně [6, str. 73]:

Nechť $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a \geq 0}$, pak takové (jediné) nezáporné číslo $\boldsymbol{b}$, pro které platí $\boldsymbol{b^n = a}$, se nazývá **$\boldsymbol{n}$-tá odmocnina čísla $\boldsymbol{a}$**. Zapisuje se $\boldsymbol{b = \sqrt[n]{a}}$. Číslu $\boldsymbol{a}$ se říká **základ odmocniny** a číslu $\boldsymbol{n}$ **odmocnitel**.

Pro $\boldsymbol{n = 1}$ je $\boldsymbol{\sqrt[1]{a} = a}$; pro $\boldsymbol{n = 2}$ se často píše místo $\boldsymbol{\sqrt[2]{a}}$ pouze $\boldsymbol{\sqrt{a}}$.

Je-li $\boldsymbol{a = 0}$, pak je $\boldsymbol{\sqrt[n]{0} = 0}$, např. $\sqrt[6]{0} = 0$

Pro **sudé $\boldsymbol{n}$**:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$$

$\sqrt[2]{2^2} = \sqrt[2]{4} = |2|$, neboť:

$2 \cdot 2 = 4 \quad \wedge \quad (-2) \cdot (-2) = 4$

Pro **liché $\boldsymbol{n}$**:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{(-a)^n} = -\sqrt[n]{a^n} = -a}$$

$\sqrt[3]{(-2)^3} = -\sqrt[3]{2^3} = -\sqrt[3]{8} = -2$, neboť:

$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Odmocňování je inverzní operací k umocňování, neboť platí např.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \wedge \quad 2^3 = 8$$

Z definice n-té odmocniny a vzorců pro počítání s mocninami je možné odvodit vzorce pro počítání s odmocninami. Ty platí pro každé $\boldsymbol{n, m, p} \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{a, b} \geq \mathbf{0}$:

$\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$		$\sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{a \cdot b}$	$\sqrt[7]{5} \cdot \sqrt[7]{3} = \sqrt[7]{15}$
$\dfrac{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$	(pro $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$)	$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$
$\left(\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$		$\left(\sqrt[5]{a}\right)^4 = \sqrt[5]{a^4}$	$\left(\sqrt[5]{2}\right)^4 = \sqrt[5]{2^4}$
$\sqrt[\boldsymbol{m}]{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[\boldsymbol{m \cdot n}]{\boldsymbol{a}}$		$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[12]{7}$
$\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}} = \sqrt[\boldsymbol{n \cdot p}]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{p}}}$		$\sqrt[4]{a} = \sqrt[8]{a^2}$	$\sqrt[4]{8} = \sqrt[8]{8^2}$

Důsledkem těchto pravidel je platnost následujících vztahů:

$\left(\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{a}$	(pro $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$)	$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a$
$\sqrt[\boldsymbol{m}]{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\sqrt[\boldsymbol{m}]{\boldsymbol{a}}}$	(pro $\boldsymbol{m, n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$)	$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$
$\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}} \cdot \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a}\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}$	(pro $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a, b} > \mathbf{0}$)	$\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$

IV. Po zavedení odmocniny lze definovat **mocninu s racionálním exponentem** ($\boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}$). **Mocnina s racionálním exponentem** $\boldsymbol{m/n}$, kde $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ a $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ je pro nezáporné reálné číslo $\boldsymbol{a}$ definována vztahem:

$\boldsymbol{a}^{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$	$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

4.1.5 Logaritmus

Definice logaritmu [10, str. 151]:

Logaritmem kladného reálného čísla x při základu $a \in \mathbb{R}^{+} - \{1\}$ se nazývá takové reálné číslo $\boldsymbol{y = \log_a x}$, že $\boldsymbol{a^y = x}$. Číslo $\boldsymbol{a}$ se nazývá **základ**, $\boldsymbol{x}$ **logaritmované číslo** a $\boldsymbol{y}$ **logaritmus.**

Pro hodnoty základů $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{a = e}$ (Eulerovo číslo) a $\boldsymbol{a = 10}$ se často používají specifická pojmenování a symboly:

- **Binární** logaritmus $\log_2 x = \mathbf{ld}\, \boldsymbol{x}$
- **Přirozený** logaritmus $\log_e x = \mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}$
- **Dekadický** logaritmus $\log_{10} x = \mathbf{log}\, \boldsymbol{x}$

Pro počítání s logaritmy platí následující **pravidla**:

$$\boldsymbol{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y} \qquad \log\left(4\sqrt{3}\right) = \log 4 + \log \sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y} \qquad \ln\left(\frac{9}{4}\right) = \ln 9 - \ln 4$$

$$\boldsymbol{\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x} \qquad \log_5 (2^3) = 3 \cdot \log_5 2$$

$$\boldsymbol{\log_a a = 1} \qquad \log 10 = 1, \quad \ln e = 1$$

$$\boldsymbol{\log_a 1 = 0} \qquad \log 1 = 0, \quad \ln 1 = 0$$

Převod mezi **logaritmy o různých základech**:

$$\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}} \qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}^{*}$$

* Tento vztah je odvoditelný z následujících rovnic:

$$\begin{aligned} \log x &= z \\ x &= 10^z \\ \ln x &= z \cdot \ln 10 \\ \ln x &= \log x \cdot \ln 10 \\ \log x &= \frac{\ln x}{\ln 10} \end{aligned}$$

4.1.6 Algebraické výrazy

Základní algebraické výrazy je možné rozložit na více členů dle následujících **vztahů:**

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2$$
$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3 + 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{b}^3$$
$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3 - 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{b}^3$$
$$\boldsymbol{a}^3 + \boldsymbol{b}^3 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2)$$
$$\boldsymbol{a}^3 - \boldsymbol{b}^3 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2)$$

4.2 Funkce jedné proměnné

4.2.1 Definice a vlastnosti funkcí jedné proměnné

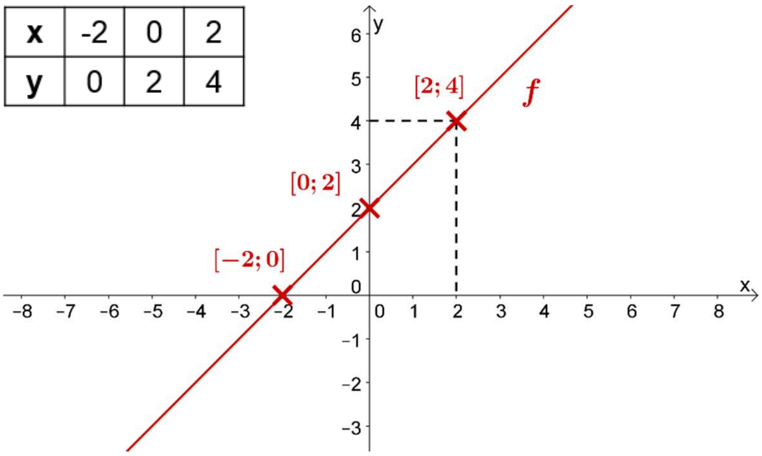
Definice funkce f [21]:

Funkce $\boldsymbol{f}$ na množině $\boldsymbol{D_f} \subseteq \mathbb{R}$ je předpis, který každému **číslu** $\boldsymbol{x}$ z množiny $\boldsymbol{D_f}$ přiřazuje právě jedno **reálné číslo** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ z množiny $\boldsymbol{H_f} \subseteq \mathbb{R}$.

Množina $\boldsymbol{D_f}$ se nazývá **definiční obor** funkce a množina $\boldsymbol{H_f}$ se označuje jako **obor hodnot** funkce. **Nezávisle proměnná**, $\boldsymbol{x}$, se také označuje názvem **argument funkce** či **neznámá.** **Reálné číslo** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ se nazývá **funkční hodnota** či **závisle proměnná** a často se značí symbolem $\boldsymbol{y}$.

Průběh funkcí jedné proměnné je možné znázornit v **kartézské soustavě souřadnic**, kde **osa** $\boldsymbol{x}$ je osou nezávisle proměnné a **osa** $\boldsymbol{y}$ je osou závisle proměnné. Souřadnice libovolného bodu v kartézské soustavě souřadnic se zapisují ve tvaru $[\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}]$. Funkce bývají zpravidla zadány **funkčním předpisem** (např. $f: y = x + 2$), **graficky** nebo **tabulkou** funkčních hodnot (Obr. 4.1).

x	-2	0	2
y	0	2	4



Obr. 4.1 Graf funkce $f: y = x + 2$ a tabulka vybraných funkčních hodnot.

Vybrané vlastnosti funkcí [21]:

- Funkce f je **rostoucí**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, kde $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$.
- Funkce f je **klesající**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, kde $x_1 < x_2$: $f(x_1) > f(x_2)$.
- Funkce f je **nerostoucí**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, kde $x_1 < x_2$: $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Funkce f je **neklesající**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, kde $x_1 < x_2$: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Funkce f je **monotónní**, jestliže je rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající.

Každá rostoucí funkce je zároveň **neklesající** a každá klesající funkce je také **nerostoucí**.

- Funkce f je **shora omezená**, jestliže $\exists A \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall x \in D_f$: $f(x) \leq A$.
- Funkce f je **zdola omezená**, jestliže $\exists A \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall x \in D_f$: $f(x) \geq A$.
- Funkce f je **omezená**, jestliže je zároveň omezená shora i zdola.

Extrém funkce je souhrnné označení pro maximum a minimum funkce. [7, str. 227] Extrémem funkce na množině se rozumí největší nebo nejmenší hodnota této funkce na dané množině.

- Funkce f je **prostá**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f$, kde $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Graf **prosté funkce** má s každou rovnoběžkou s osou nezávisle proměnné nejvýše jeden průsečík.

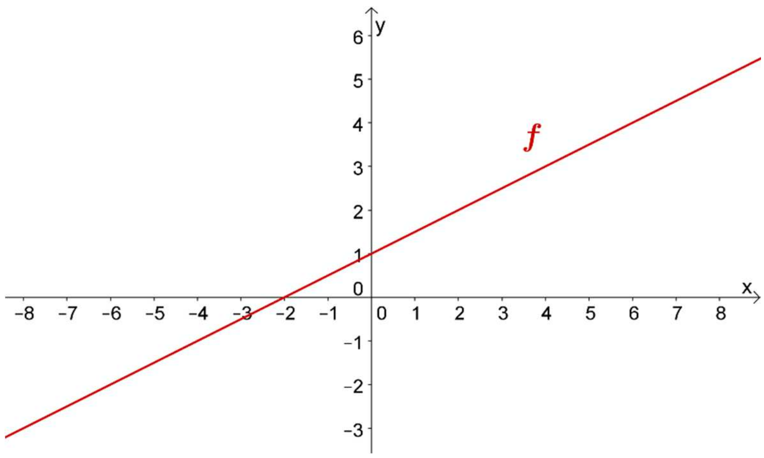
- Funkce f je **sudá**, jestliže $\forall x \in D_f$: $f(x) = f(-x)$.
- Funkce f je **lichá**, jestliže $\forall x \in D_f$: $f(-x) = -f(x)$.

Graf **sudé funkce** je osově souměrný podle osy y. Graf **liché funkce** je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.

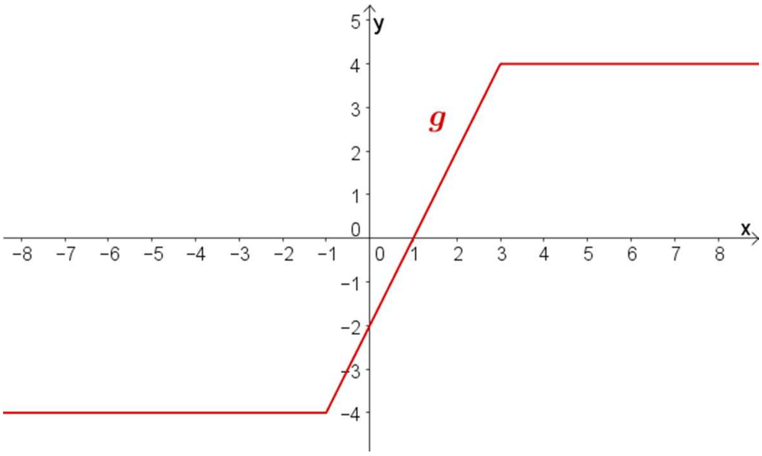
- Funkce f je **periodická**, jestliže $\exists p > 0, p \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\forall k \in \mathbb{Z}$:
  $f(x) = f(x + kp)$, kde $\{x; x + kp\} \in D_f$. Číslo p se nazývá periodou funkce.

Graf **periodické funkce** je tvořen periodicky se opakujícím úsekem.

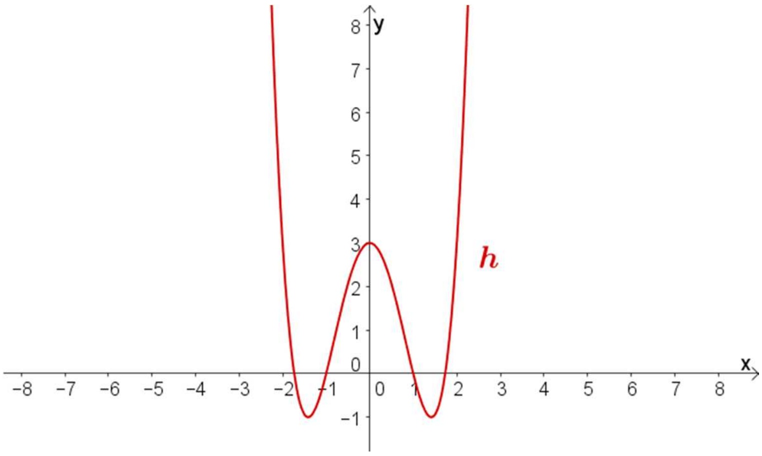
Některé vlastnosti funkcí jsou graficky znázorněny na Obr. 4.2 – 4.7.



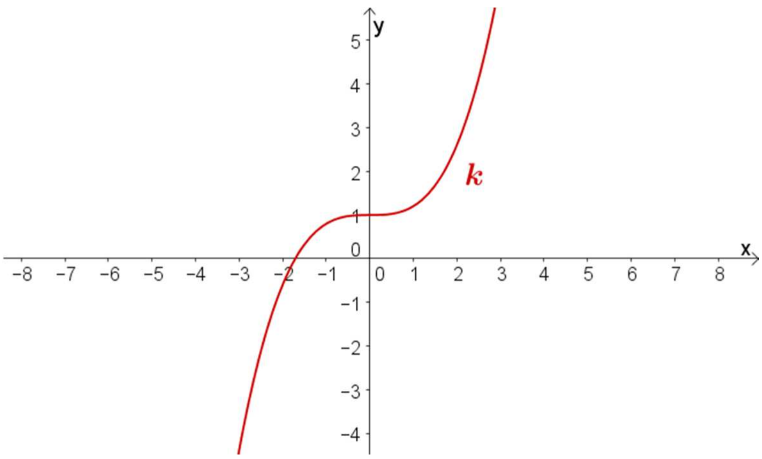
Obr. 4.2 Graf funkce $f: y = \frac{x}{2} + 1$. Funkce je rostoucí, neklesající, monotónní a prostá.



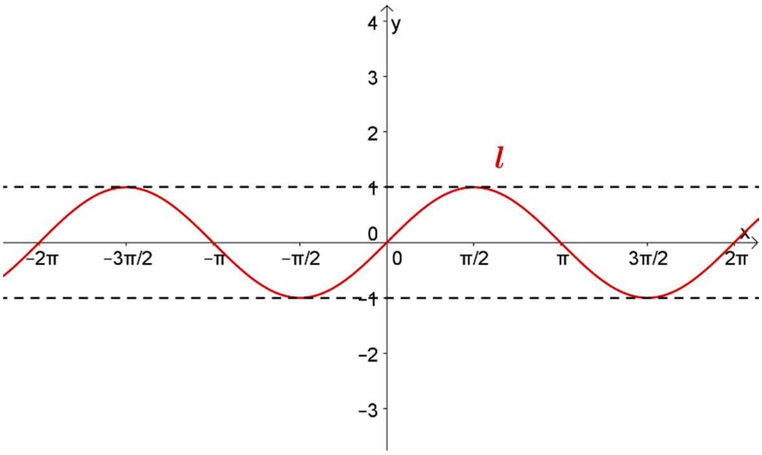
Obr. 4.3 Graf funkce $g\colon y = |x+1| - |3-x|$. Funkce je neklesající, monotónní, shora omezená, zdola omezená, omezená.



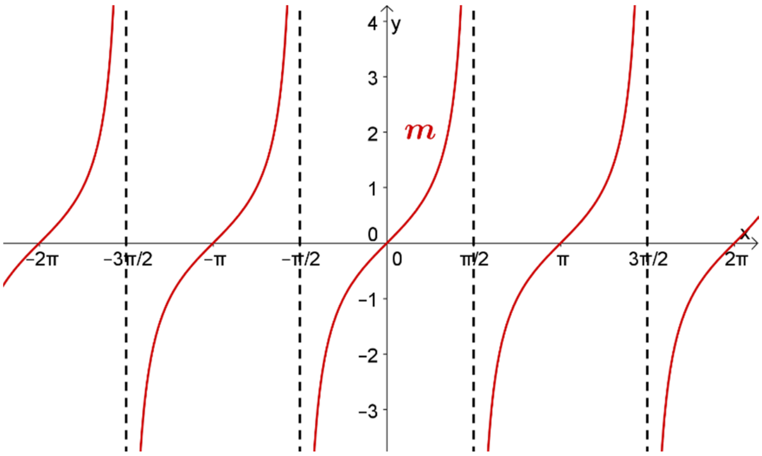
Obr. 4.4 Graf funkce $h\colon y = x^4 - 4x^2 + 3$. Funkce je zdola omezená a sudá.



Obr. 4.5 Graf funkce $k\colon y = \frac{x^3}{5} + 1$. Funkce je rostoucí, neklesající, monotónní a prostá.



Obr. 4.6 Graf funkce $l: y = \sin x$. Funkce je shora omezená, zdola omezená, tedy omezená, lichá a periodická s periodou $p = 2\pi$.



Obr. 4.7 Graf funkce $m: y = \operatorname{tg} x$. Funkce je lichá a periodická s periodou $p = \pi$.

4.2.2 Složená a inverzní funkce

Definice složené funkce [21]:

- Funkce h je **složenou funkcí z funkcí $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$** (v uvedeném pořadí), jestliže existují funkce $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ s definičním oborem $\boldsymbol{D_f}$ a $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ s oborem hodnot H_g a platí: $\boldsymbol{H_g} \subset \boldsymbol{D_f}$ a $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$. Předpis této složené funkce je možné také zapsat ve tvaru: $h = f \circ g$. Funkce $\boldsymbol{f}$ se nazývá **vnější složkou (funkcí)** a funkce $\boldsymbol{g}$ **vnitřní složkou (funkcí) funkce $\boldsymbol{h}$**.

Definice inverzní funkce [21]:

- Funkce f^{-1} je **inverzní k funkci f**, jestliže $D_{f^{-1}} = H_f$ a dále platí: $\forall y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno takové $x \in D_f$, pro které: $f(x) = y$.

4.2.3 Polynomické funkce

Polynomické funkce jsou dány předpisem:

$$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0},$$

kde $\boldsymbol{a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0} \in \mathbb{R}$; $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_0$

Číslo $\boldsymbol{n}$ udává **stupeň polynomické funkce**, prvek $\boldsymbol{a_n}$ se nazývá **koeficient členu** polynomické funkce stupně n a $\boldsymbol{a_0}$ je **absolutní člen** polynomické funkce.

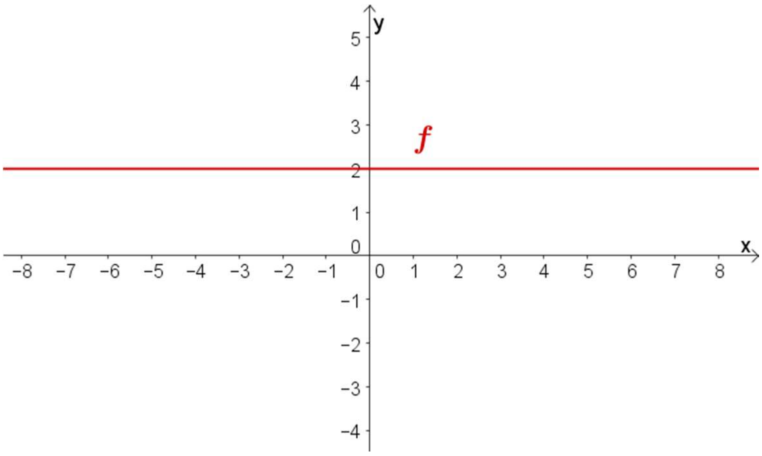
Konstantní funkce

Polynomická funkce stupně $n = 0$ se označuje jako konstantní funkce a je dána předpisem:

$$\boldsymbol{f(x) = a}, \quad \text{kde } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$$

Definičním oborem D_f konstantní funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$, oborem hodnot H_f konstantní funkce je množina obsahující pouze prvek a. Grafem konstantní funkce je **přímka rovnoběžná s osou $\boldsymbol{x}$** procházející bodem $[0;\ a]$ (Obr. 4.8).

Konstantní funkce je nerostoucí, neklesající, monotónní, shora omezená, zdola omezená, tedy omezená, sudá a periodická. V případě konstantní funkce není možné určit hodnotu periody p.



Obr. 4.8 Graf konstantní funkce $f: y = 2$.

Lineární funkce

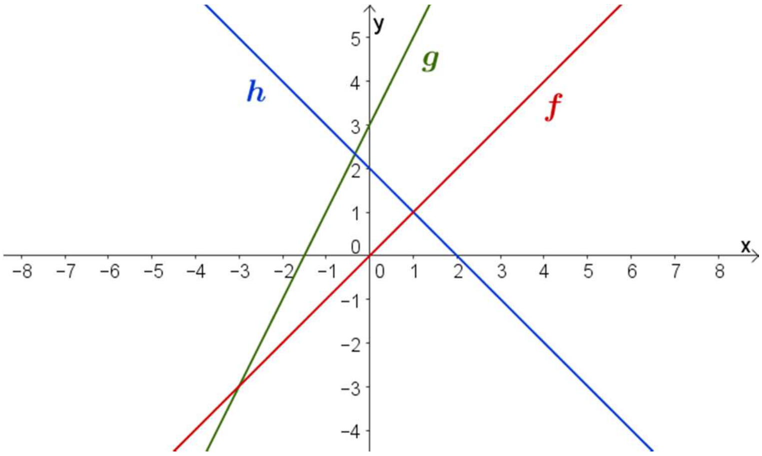
Polynomická funkce stupně $n = 1$ se označuje jako lineární funkce a je dána předpisem:

$$\boldsymbol{f(x) = ax + b}, \quad \text{kde } \boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a \neq 0}$$

Speciálním případem lineární funkce je **přímá úměra** ($b = 0$).

Definičním oborem D_f lineární funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$, oborem hodnot H_f lineární funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je **přímka** (Obr. 4.9). V případě přímé úměry tato přímka prochází počátkem, tedy bodem se souřadnicemi $[0;\ 0]$.

Lineární funkce je vždy monotónní a prostá. Je-li $\boldsymbol{a > 0}$, pak je lineární funkce rostoucí a neklesající. Je-li $\boldsymbol{a < 0}$, pak je lineární funkce klesající a nerostoucí. Pro $\boldsymbol{b = 0}$ je lineární funkce lichá.

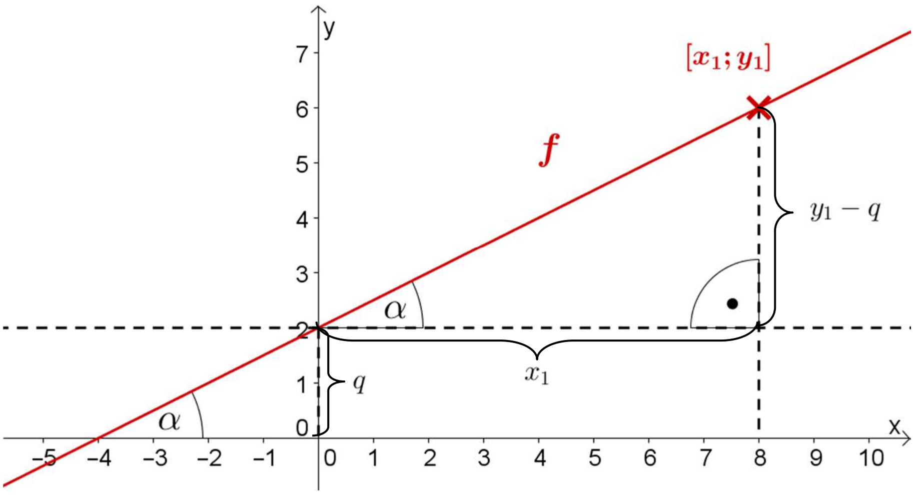


Obr. 4.9 Grafy lineárních funkcí $f: y = x$, $g: y = 2x + 3$ a $h: y = -x + 2$.

Rovnici přímky je možné vyjádřit ve směrnicovém tvaru:

$$\boldsymbol{y = kx + q,}$$

kde $\boldsymbol{k}$ se nazývá **směrnice přímky** a $\boldsymbol{q}$ udává **úsek na ose** $\boldsymbol{y}$. Jak je patrné z rovnice, q představuje hodnotu y pro $x = 0$. Směrnice přímky je definována jako $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}$, kde α je úhel, který svírá přímka s kladnou poloosou osy x (Obr. 4.10).



Obr. 4.10 Znázornění významu parametrů k a q směrnicového tvaru přímky funkce $f: y = \frac{x}{2} + 2$.

Hodnotu $\mathrm{tg}\,\alpha$ lze vyjádřit jako poměr protilehlé a přilehlé strany v **pravoúhlém trojúhelníku** (Obr. 4.10). Pro směrnici přímky tedy platí:

$$\boldsymbol{k = \frac{y_1 - q}{x_1}},$$

kde $[\boldsymbol{x_1};\ \boldsymbol{y_1}]$ je libovolně zvolený bod na dané přímce s výjimkou bodu $[0; q]$.

Kvadratická funkce

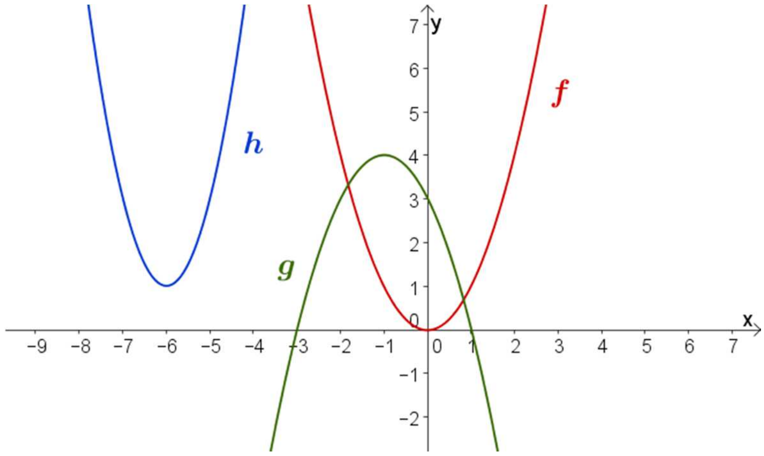
Polynomická funkce stupně $n = 2$ se označuje jako kvadratická funkce a je dána předpisem:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}, \quad \text{kde } \boldsymbol{a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0}$$

Je-li $b = 0$, pak se hovoří o **kvadratické funkci bez lineárního členu**. Je-li $c = 0$, pak se jedná o **kvadratickou funkci bez absolutního členu**.

Definičním oborem D_f kvadratické funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Grafem kvadratické funkce je **parabola** s vrcholem v bodě $[\boldsymbol{-b/2a\,;\, c - b^2/4a}]$. Je-li $\boldsymbol{a > 0}$, pak je parabola otevřená směrem vzhůru a oborem hodnot H_f je interval $\langle c - b^2/4a\,; \infty)$. Je-li $\boldsymbol{a < 0}$, pak je parabola otevřená směrem dolů a oborem hodnot H_f je interval $(-\infty; c - b^2/4a\rangle$.

Je-li $\boldsymbol{a > 0}$, pak je kvadratická funkce zdola omezená. Je-li $\boldsymbol{a < 0}$, pak je kvadratická funkce shora omezená. Je-li $\boldsymbol{b = 0}$, pak je kvadratická funkce sudá. Příklady grafů kvadratických funkcí jsou uvedeny na Obr. 4.11.



Obr. 4.11 Grafy kvadratických funkcí $f\colon y = x^2$, $g\colon y = -x^2 - 2x + 3$ a $h\colon y = 2x^2 + 24x + 73$.

Jak je z Obr. 4.11 patrné, graf kvadratické funkce může mít dva, jeden nebo žádný průsečík s osou x. Řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$), která je funkčním předpisem dané kvadratické funkce $f\colon y = ax^2 + bx + c$, jsou x-ové souřadnice průsečíku grafu funkce s osou x. Řešením kvadratické rovnice jsou pak nejvýše dva kořeny, které se vypočítají podle vztahu:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \quad \text{kde } \boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$$

Prvek D se nazývá diskriminant a platí:

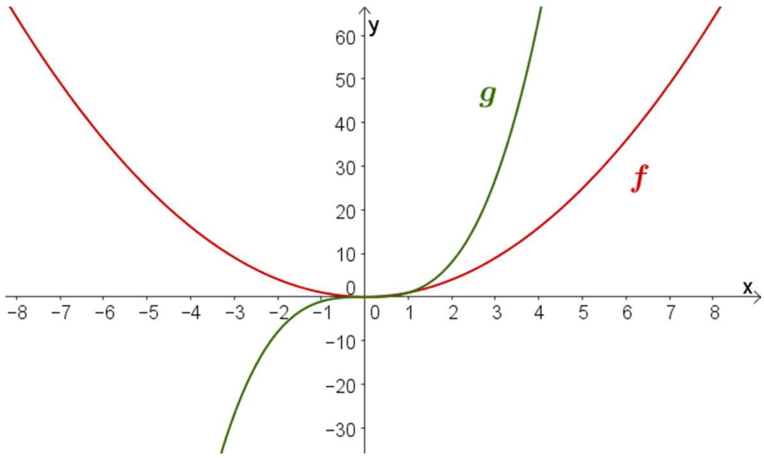
- je-li $D > 0$, jsou řešením kvadratické rovnice dva reálné kořeny,
- je-li $D = 0$, je řešením kvadratické rovnice jeden reálný kořen (tzv. dvojnásobný kořen),
- je-li $D < 0$, kvadratická rovnice nemá žádný reálný kořen.

Mocninná funkce

Speciálním případem polynomické funkce je **mocninná funkce,** která je dána předpisem:

$$\boldsymbol{f(x) = x^n}, \quad \text{kde } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Příklady grafů mocninných funkcí jsou uvedeny na Obr. 4.12.



Obr. 4.12 Grafy mocninných funkcí $f: y = x^2$ a $g: y = x^3$.

4.2.4 Lineární lomená funkce

Lineární lomená funkce je dána předpisem:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}},$$

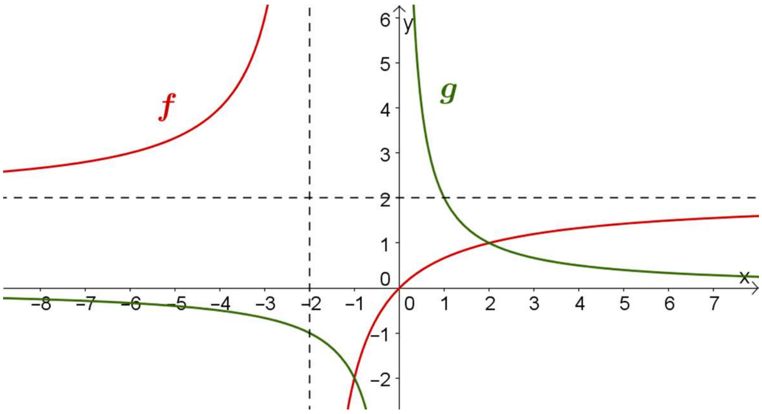
kde $\boldsymbol{a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, ad - bc \neq 0}$

Speciálním případem lineární lomené funkce je **nepřímá úměra,** pro kterou platí $a, d = 0$. Nepřímá úměra je tedy dána předpisem:

$$y = \frac{b}{cx}$$

Definičním oborem D_f lineární lomené funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ kromě prvku $\{-d/c\}$. Oborem hodnot H_f lineární lomené funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ kromě prvku $\{a/c\}$. Grafem lineární lomené funkce je **hyperbola** (Obr. 4.13).

Lineární lomená funkce je prostá. Nepřímá úměra je funkce lichá.



Obr. 4.13 Grafy lineárních lomených funkcí $f\colon y = \frac{2x}{x+2}$ a $g\colon y = \frac{2}{x}$.

4.2.5 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je dána předpisem:

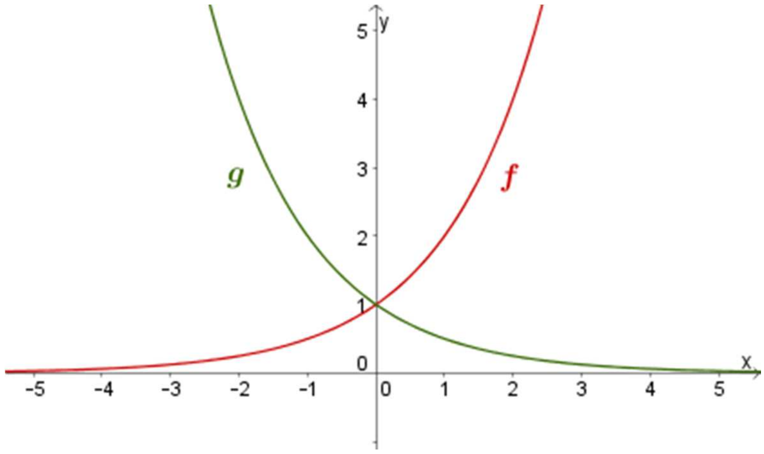
$$\boldsymbol{f(x) = a^x}, \quad \text{kde } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Je-li $a = e$, pak se funkce $y = e^x$ nazývá přirozenou exponenciální funkcí a je možné ji zapisovat také ve tvaru $y = \exp(x)$.

Definičním oborem D_f exponenciální funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Oborem hodnot H_f exponenciální funkce je množina všech kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$. Grafem exponenciální funkce je **exponenciála** procházející bodem [0; 1].

Exponenciální funkce je monotónní, zdola omezená a prostá. Je-li $\boldsymbol{a > 1}$, pak je exponenciální funkce rostoucí a neklesající. Je-li $\boldsymbol{0 < a < 1}$, pak je exponenciální funkce klesající a nerostoucí.

Příklady grafů exponenciálních funkcí jsou uvedeny na Obr. 4.14.



Obr. 4.14 Grafy exponenciálních funkcí $f\colon y = 2^x$ a $g\colon y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

4.2.6 Logaritmická funkce

Inverzní funkcí (viz 4.2.2) k funkci exponenciální je **funkce logaritmická,** která je dána předpisem:

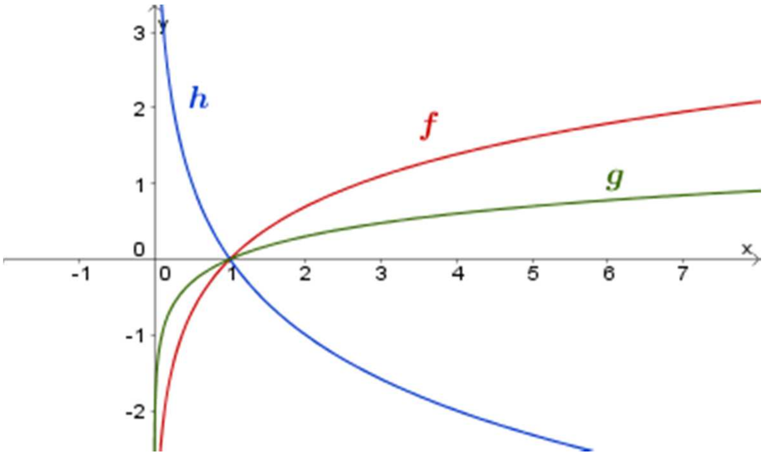
$$\boldsymbol{f(x) = \log_a(x)}, \text{ kde } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^+ - \{\boldsymbol{1}\}$$

Je-li $a = e$, pak se funkce $y = \log_e x = \ln x$ nazývá **přirozenou logaritmickou funkcí.**

Definičním oborem D_f logaritmické funkce je množina všech kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$. Oborem hodnot H_f logaritmické funkce je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Grafem logaritmické funkce je **logaritmická křivka** procházející bodem $[1;\ 0]$.

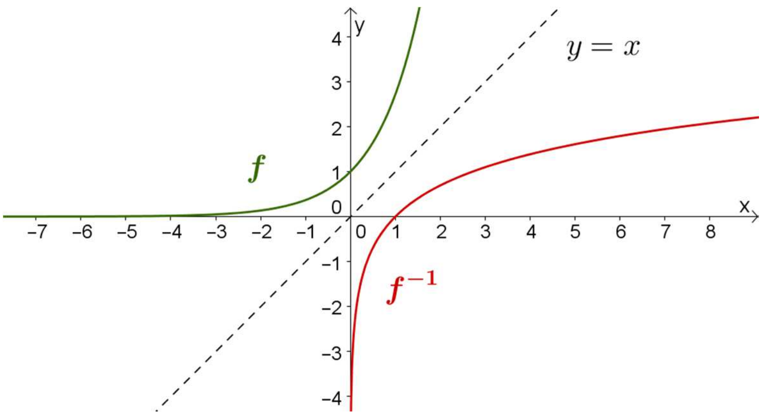
Logaritmická funkce je monotónní a prostá. Je-li $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$, pak je logaritmická funkce rostoucí a neklesající. Je-li $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$, pak je logaritmická funkce klesající a nerostoucí.

Příklady grafů logaritmických funkcí jsou uvedeny na Obr. 4.15. U funkce $h\colon y = -\mathrm{ld}\, x$ lze předpis funkce zapsat také ve tvaru $h\colon y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



Obr. 4.15 Grafy logaritmických funkcí $f: y = \ln x$, $g: y = \log x$ a $h: y = -\operatorname{ld} x$.

Na Obr. 4.16 je znázorněn inverzní vztah mezi přirozenou exponenciální funkcí $f: y = e^x$ a přirozenou logaritmickou funkcí $f^{-1}: y = \ln x$. Grafy těchto funkcí jsou osově souměrné podle přímky $y = x$.



Obr. 4.16 Grafy funkcí $f: y = e^x$ a $f^{-1}: y = \ln x$.

4.3 Soustavy rovnic

K jednoznačnému určení množiny všech řešení soustavy rovnic s n neznámými je třeba n vzájemně nezávislých a vzájemně si neodporujících rovnic. [10, str. 227] Způsob řešení spočívá v tom, že se soustava n rovnic s n neznámými postupně redukuje na jednu rovnici s jednou neznámou. Pomocí hodnoty jedné neznámé vypočtené z této rovnice lze postupně určit hodnoty ostatních neznámých.

Způsob řešení bude demonstrován na soustavách dvou lineárních rovnic.

4.3.1 Sčítací metoda

Rovnice se vynásobí takovým vhodným číslem, aby po sečtení rovnic se jedna neznámá eliminovala.

Např.

$$
\begin{array}{rcl}
x + 2y & = & -1 \quad /\cdot(-2) \\
\underline{2x - y} & \underline{=} & \underline{8}
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{rcl}
-2x - 4y & = & 2 \\
\underline{2x - y} & \underline{=} & \underline{8}
\end{array}
\right\} +
$$

$$
\begin{array}{rcl}
-5y & = & 10 \\
y & = & -2
\end{array}
$$

Vypočítaná hodnota se následně dosadí do libovolné ze dvou původních rovnic a dopočítá se hodnota druhé neznámé:

$$
\begin{array}{rcl}
x + 2\cdot(-2) & = & -1 \\
x & = & 3
\end{array}
$$

Řešením zadané soustavy jsou hodnoty $x = 3$ a $y = -2$.

4.3.2 Dosazovací (substituční) metoda

Tato metoda spočívá v tom, že se z jedné rovnice vyjádří jedna neznámá a následně se dosadí do druhé rovnice.

Např.

$$\begin{aligned} x - y &= -4 \\ \underline{4x + 3y} &\underline{= 5} \\ x &= -4 + y \\ 4 \cdot (-4 + y) + 3y &= 5 \\ 7y &= 21 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -4 + 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Řešením zadané soustavy jsou hodnoty $x = -1$ a $y = 3$.

4.3.3 Srovnávací (komparační) metoda

Obě rovnice se řeší pro stejnou neznámou a výsledné výrazy se položí sobě rovné. Tím se opět jedna neznámá eliminuje.

Např.

$$\begin{aligned} x - 4y &= -1 \\ \underline{x + 3y} &\underline{= 13} \\ x &= -1 + 4y \\ \underline{x} &\underline{= 13 - 3y} \\ -1 + 4y &= 13 - 3y \\ 7y &= 14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 4 \cdot (2) &= -1 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Řešením zadané soustavy jsou hodnoty $x = 7$ a $y = 2$.

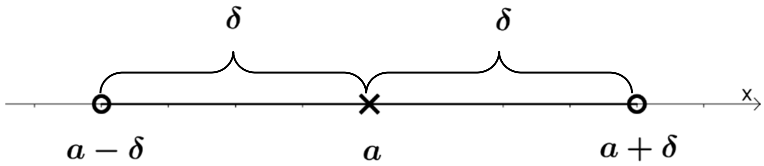
4.4 Diferenciální a integrální počet

4.4.1 Okolí bodu, spojitost a limita funkce

Definice okolí bodu [3, str. 22]:

Okolím bodu $\boldsymbol{a}$ se nazývá otevřený interval $(\boldsymbol{a-\delta};\ \boldsymbol{a+\delta})$, kde $\boldsymbol{\delta}$ je kladné reálné číslo. Bod a se nazývá **střed okolí** a číslo δ **poloměr okolí.** *

Grafické znázornění okolí bodu a je uvedeno na Obr. 4.17.



Obr. 4.17 Grafické znázornění δ-okolí bodu a.

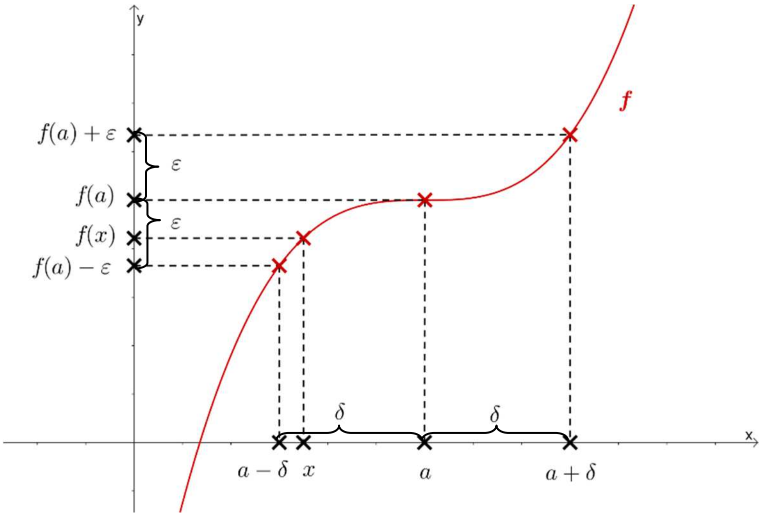
Definice spojitosti funkce v bodě [3, str. 26]:

Funkce f je **spojitá v bodě $\boldsymbol{a}$**, jestliže k libovolně zvolenému ε-okolí bodu $f(a)$ existuje takové **$\boldsymbol{\delta}$-okolí bodu $\boldsymbol{a}$**, že pro všechna x z δ-okolí bodu a patří hodnoty $f(x)$ do zvoleného **$\boldsymbol{\varepsilon}$-okolí bodu $\boldsymbol{f(a)}$**.

Objasnění definice spojitosti funkce je znázorněno na Obr. 4.18.

---

*Okolí bodu a je možné zapsat ve tvaru $U(a) = U(a,\delta) = (a-\delta;\ a+\delta)$.
Levým okolím bodu a je interval $U^{-}(a) = U^{-}(a,\ \delta) = (a-\delta; a\rangle$.
Pravým okolím bodu a je interval $U^{+}(a) = U^{+}(a,\ \delta) = \langle a; a+\delta)$.



Obr. 4.18 Grafické objasnění definice spojitosti funkce f v bodě a.

Definice limity funkce [3, str. 39]:

Funkce $\boldsymbol{f}$ má v bodě a **limitu $\boldsymbol{L}$**, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje **okolí bodu $\boldsymbol{a}$** tak, že pro všechna $\boldsymbol{x \neq a}$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému **okolí bodu $\boldsymbol{L}$**.

Skutečnost, že funkce f má v bodě a limitu L, se zapisuje ve tvaru:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

a čte se: „Limita funkce f pro x jdoucí k a je rovna L“.

V případě spojitých funkcí je hodnota L rovna hodnotě $f(a)$.

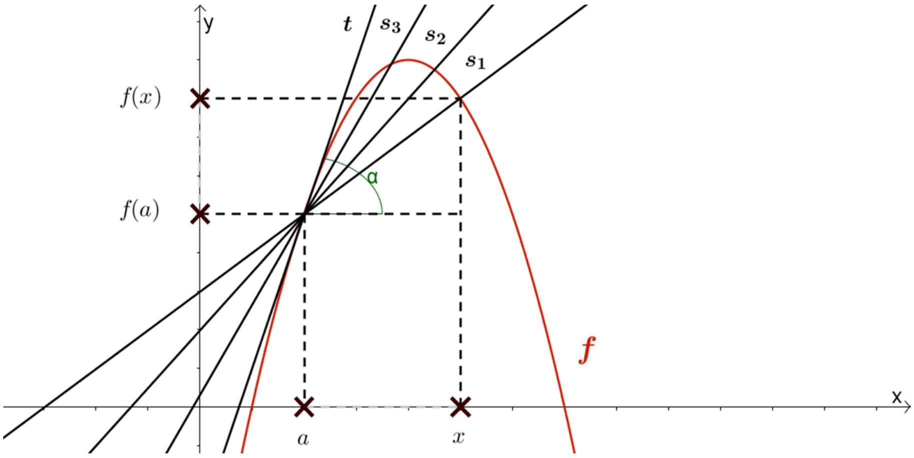
4.4.2 Definice a význam derivace

Definice derivace [20, str. 28]:

Nechť **funkce $\boldsymbol{f}$** je definována v **okolí bodu $\boldsymbol{a}$**. Poté má $\boldsymbol{f}$ v **bodě $\boldsymbol{a}$** derivaci rovnu $\boldsymbol{A}$, je-li:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

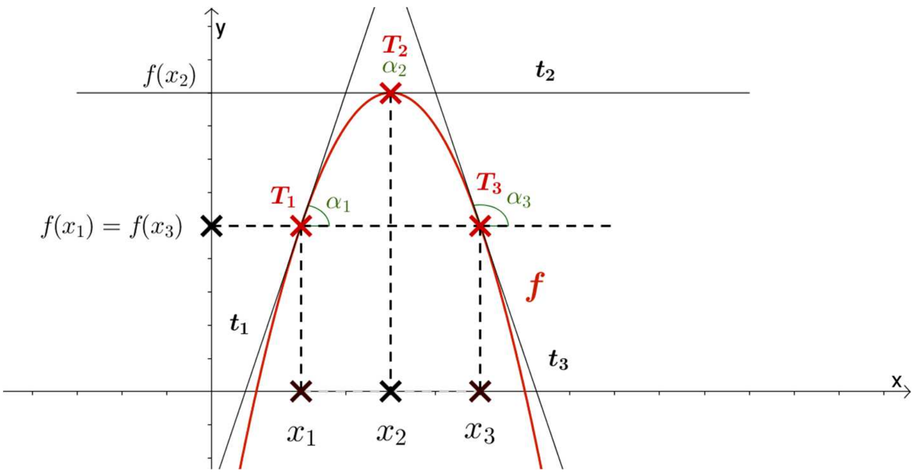
Derivace funkce $\boldsymbol{f}$ v bodě a se značí $\boldsymbol{f'(a)}$.



Obr. 4.19 Grafické objasnění pojmu derivace funkce f v bodě a. s_1, s_2, s_2 značí sečny grafu funkce f, t je tečna grafu funkce f.*

Z Obr. 4.19 je vidět, že pro $x \to a$ se sečny s_1, s_2, s_3 postupně blíží k tečně t grafu funkce s bodem dotyku $[a;\ f(a)]$. Podle definice derivace je směrnice této tečny derivací funkce f v bodě a. Pro směrnici tečny k platí $k = \operatorname{tg} \alpha$ (4.2.3).

Na Obr. 4.20 je ukázána souvislost mezi směrnicemi tečen grafu funkce f a průběhem funkce v okolí bodů dotyku.

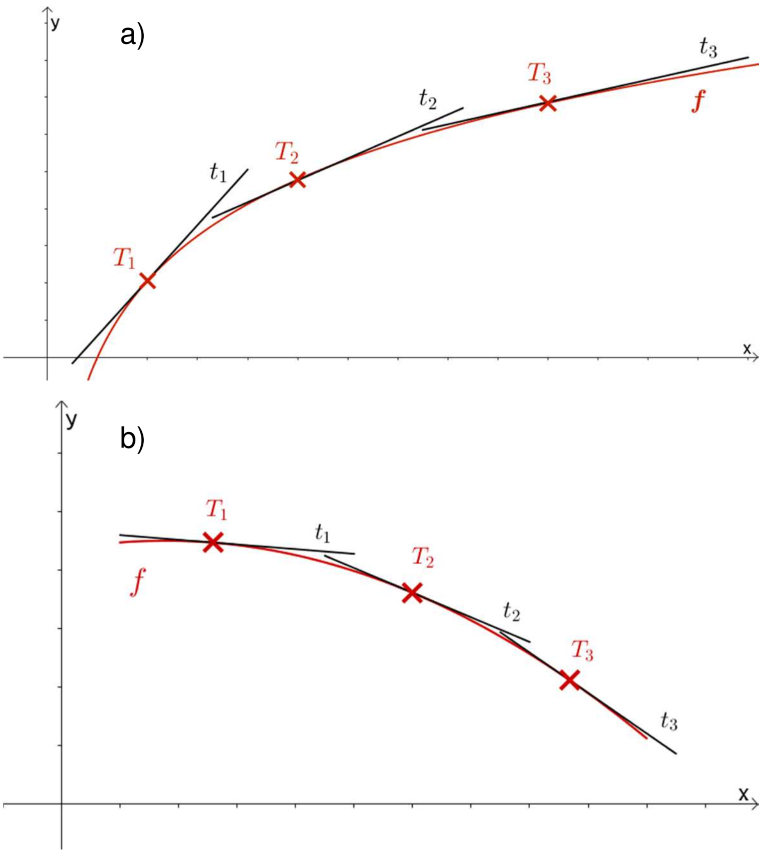


Obr. 4.20 Znázornění souvislosti mezi směrnicemi tečen t_1, t_2, t_3 grafu funkce f v bodech dotyku T_1, T_2, T_3 a průběhem funkce v okolí těchto bodů.

* Sečna je přímka, která protíná obecnou křivku v alespoň dvou bodech. Tečna je přímka, která protíná obecnou křivku právě v jednom bodě.

Z Obr. 4.20 je zřejmé, že je-li směrnice tečny t ke grafu funkce f v bodě dotyku T (tedy první derivace funkce f v bodě T) kladná, $f'(T) > 0$, pak je funkce f v okolí bodu T rostoucí. Na Obr. 4.20 tomu odpovídá tečna t_1 v bodě dotyku T_1 o souřadnicích $[x_1;\ f(x_1)]$. Naopak, je-li první derivace funkce f v bodě dotyku T záporná, $f'(T) < 0$, pak je funkce v okolí bodu T klesající. Na Obr. 4.20 tomu odpovídá tečna t_3 v bodě dotyku $T_3 = [x_3; f(x_3)]$. Jestliže je první derivace funkce f v bodě T nulová, $f'(T) = 0$, a současně platí, že v levém a v pravém okolí (4.4.1) bodu dotyku T jsou znaménka prvních derivací funkce f různá, pak je bod T tzv. lokálním extrémem funkce f. Na Obr. 4.20 tomu odpovídá tečna t_2 v bodě dotyku $T_2 = [x_2; f(x_2)]$.

Absolutní hodnota první derivace funkce v daném bodě souvisí se strmostí grafu funkce v okolí tohoto bodu, jak ukazuje Obr. 4.21. Z obrázku je patrné, že se stoupající absolutní hodnotou první derivace funkce v daném bodě roste i strmost grafu funkce v okolí tohoto bodu.



Obr. 4.21 Objasnění souvislosti hodnoty první derivace funkce f v bodě T se strmostí grafu a) rostoucí b) klesající funkce v okolí bodu T. t_1, t_2 a t_3 jsou tečny grafu funkce f v bodech T_1, T_2, T_3.

4.4.3 Diferenciál závislé a nezávislé proměnné

Definice diferenciálu [13, str. 509]:

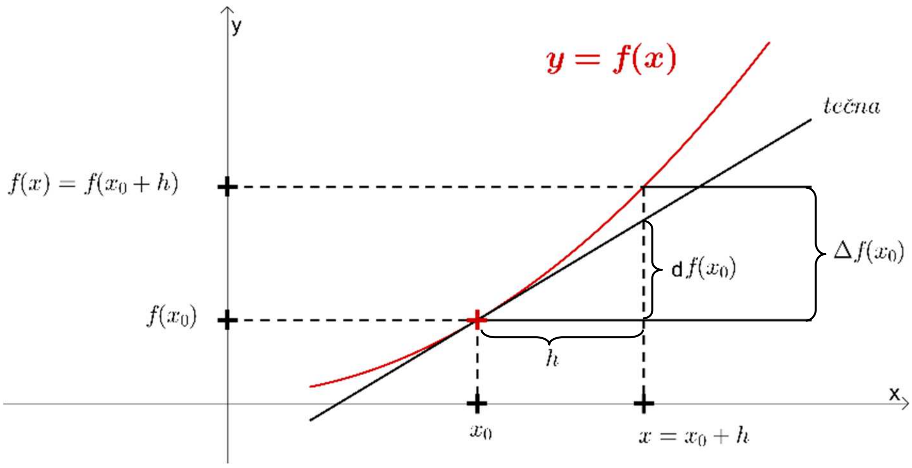
Nechť funkce $y = f(x)$ je spojitá na okolí $U(x_0)$ a nechť existuje $f'(x_0)$. Značí-li $h = x - x_0 = \Delta x$ přírůstek argumentu x v bodě x_0 pro $x \in U(x_0)$, pak je diferenciálem funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 výraz: $\mathbf{d}\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{f'(x_0)h}$.

Místo $\mathrm{d}y_0$ se píše také $\mathbf{d}\boldsymbol{f(x_0)}$. Přírůstek argumentu, h, představuje diferenciál nezávisle proměnné.

Derivaci $f'(x)$ je možné zapsat jako podíl dvou diferenciálů, a to **diferenciálu závisle proměnné, $\mathbf{d}\boldsymbol{y}$**, a **diferenciálu nezávisle proměnné, $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$**:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{y}}{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}$$

Znázornění diferenciálu funkce f a diferenciálu její nezávisle proměnné x je na Obr. 4.22. Diferenciálem funkce f v bodě x_0, $\mathrm{d}f(x_0)$, je přírůstek funkční hodnoty na příslušné tečně.



Obr. 4.22 Znázornění diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě $x_0, \mathrm{d}f(x_0)$.

4.4.4 Derivování funkcí

Z definice derivace funkce je možné k **funkci $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$** určit její **derivaci $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$**. V Tab. 4.1 jsou shrnuty derivace vybraných funkcí.

Tab. 4.1 Přehled derivací vybraných funkcí f. Symbol c značí konstantu.

Funkce	Derivace funkce	Platí pro:
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{Z}^-$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$

Pro derivaci c-násobku ($c \in \mathbb{R}$) funkce f platí vztah:

$$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$$

$$(3 \cdot \ln x)' = 3 \cdot (\ln x)' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

Při derivování je možné využít další pravidla, která platí pro funkce $\boldsymbol{f(x)}$ a $\boldsymbol{g(x)}$ mající v bodě a derivaci. V případě pravidla pro derivaci podílu je nezbytné, aby funkce $\boldsymbol{g(x)}$ byla v bodě a nenulová.

$$(\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \pm \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$$

$$(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)'(\boldsymbol{a}) = \frac{(\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{g}^2(\boldsymbol{a})}$$

$$(x^3 + e^x)' = (x^3)' + (e^x)' = \\ = 3x^2 + e^x$$

$$(x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \\ = e^x \cdot (1 + x)$$

$$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \\ = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x)}{x^4}$$

Pro **derivaci složené funkce** $f(g(x))$ platí následující vztah:

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))]' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (\sin'(2x)) \cdot (2x)' = \\ &= (\cos 2x) \cdot 2 = \\ &= 2\cos 2x\end{aligned}$$

4.4.5 Druhá derivace

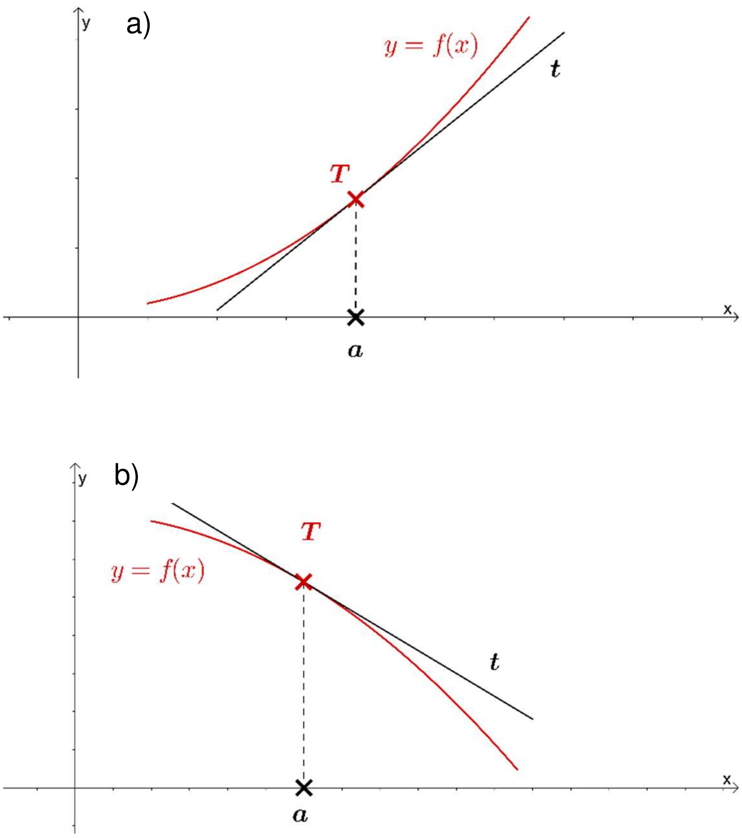
Definice druhé derivace [14, str. 97]:

Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě nějakého $U(a)$. Nechť její derivace f' má derivaci v bodě a: $(f')'(a) = A$. Potom číslo A se nazývá **druhou derivací** funkce f v bodě a. Tato druhá derivace se označuje $\boldsymbol{f''(a)}$.

Druhá derivace funkce se tedy získá zderivováním první derivace této funkce.

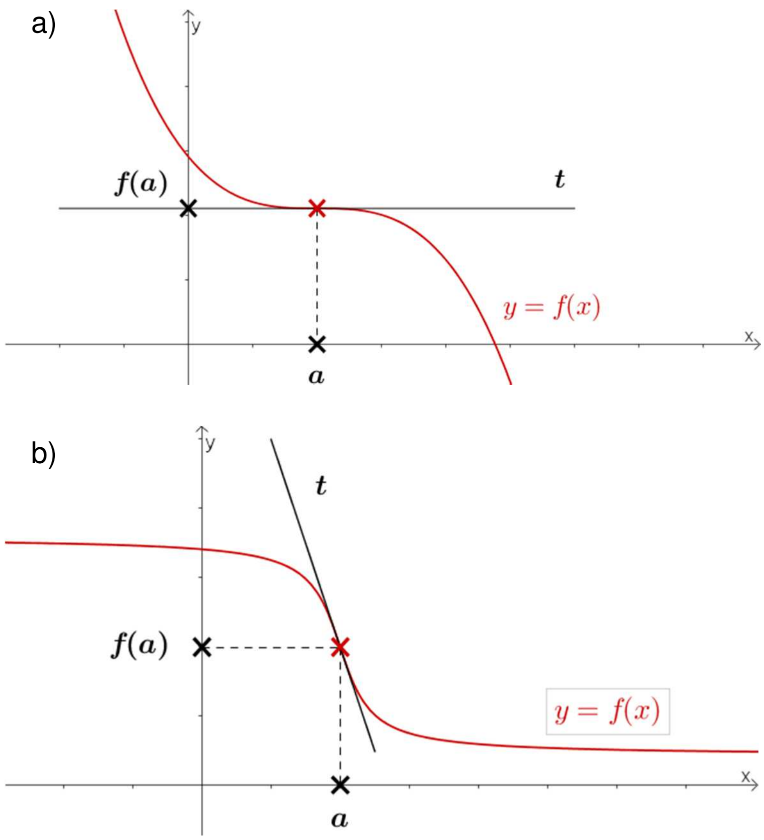
Obdobně jako znaménko a hodnota první derivace funkce v bodě vypovídá o monotónnosti a strmosti funkce v okolí tohoto bodu, lze znaménko druhé derivace funkce v bodě také využít k odhadu průběhu grafu funkce v okolí daného bodu.

Je-li druhá derivace funkce f v bodě a záporná, $f''(a) < 0$, pak je funkce f v okolí bodu a konvexní. Je-li druhá derivace funkce f v bodě a kladná, $f''(a) > 0$, pak je funkce f v okolí bodu a konkávní. Pojmy konvexnost a konkávnost souvisí se vzájemnou polohou grafu funkce a jeho tečny v daném bodě. Leží-li graf funkce nad tečnou sestrojenou ke grafu funkce v daném bodě, pak v okolí tohoto bodu je funkce konvexní (Obr. 4.23a). Jestliže leží graf funkce pod tečnou sestrojenou ke grafu funkce v daném bodě, pak je funkce v okolí tohoto bodu konkávní (Obr. 4.23b).



Obr. 4.23 Objasnění pojmů a) konvexní funkce v okolí bodu a, b) konkávní funkce v okolí bodu a. t je tečna grafu funkce $y = f(x)$. T je bod dotyku.

Je-li druhá derivace funkce f v bodě a nulová, $f''(a) = 0$, a mají-li hodnoty druhých derivací v levém a pravém okolí bodu a rozdílná znaménka, pak má funkce f v bodě a inflexní bod. V inflexním bodě přechází funkce konvexní v konkávní (Obr. 4.24a) nebo naopak (Obr. 4.24b).



Obr. 4.24 Objasnění pojmu inflexní bod funkce $y = f(x)$. t označuje tečnu grafu funkce v inflexním bodě o souřadnicích $[a;\ f(a)]$. a) Funkce $y = f(x)$ přechází v inflexním bodě z konvexní na konkávní b) Funkce $y = f(x)$ přechází v inflexním bodě z konkávní na konvexní.

4.4.6 Primitivní funkce a neurčitý integrál

Inverzní operací k derivování je **integrování.** Pro definování této operace je vhodné nejprve zavést pojem **primitivní funkce** $\boldsymbol{F(x)}$ [10, str. 571]:

> Funkce F se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na intervalu $(a; b)$, jestliže pro $\forall x \in (a;\ b)$ platí $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Množina všech primitivních funkcí k funkci f se nazývá **neurčitý integrál** funkce f a značí se $\int \boldsymbol{f(x)}\ \mathbf{d}\boldsymbol{x}$.

Jelikož derivace konstanty c je nula (Tab. 4.1), platí rovnost:

$$(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c})' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

a tedy pro neurčitý integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ platí:

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ \mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c},$$

kde $c \in \mathbb{R}$.

V Tab. 4.2 je uveden přehled vybraných **funkcí $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$** a jejich **primitivních funkcí $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$**.

Tab. 4.2 Přehled funkcí f a jejich primitivních funkcí F.

Funkce $\boldsymbol{f}$	Primitivní funkce $\boldsymbol{F}$	Platí pro:
$f(x) = 1$	$F(x) = x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x \rvert$	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$	$x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$

Pro integraci **součtu** a **rozdílu** funkcí $\boldsymbol{f(x)}$ a $\boldsymbol{g(x)}$ a integrování $\boldsymbol{c}$**-násobku** ($\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$) funkce $f(x)$ platí:

$$\int (\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} \pm \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$$

$$\int (2x + e^x)\,\mathrm{d}x = \\ = \int 2x\ dx + \int e^x\ dx = \\ = 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + e^x + c = \\ = x^2 + e^x + c$$

$$\int \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \cdot \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$$

$$\int 3 \cdot x^2\ dx = 3 \cdot \int x^2\ dx = \\ = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \\ = x^3 + c$$

4.4.7 Integrační metody

Pro integraci **součinu** dvou funkcí $\boldsymbol{f'(x)}$ a $\boldsymbol{g(x)}$ je možné použít metodu integrování „**per partes**“:

$$\int \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \\ = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$$

$$\int e^x \cdot x\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = x & g'(x) = 1 \end{vmatrix} = \\ = e^x \cdot x - \int e^x\ \mathrm{d}x = \\ = e^x \cdot x - e^x + c$$

Dalším možným způsobem výpočtu neurčitého integrálu je využití **substituce**. Princip substituce (nahrazení) **proměnné $\boldsymbol{x}$ funkcí $\boldsymbol{\varphi(t)}$** je možné vyjádřit následovně:

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}) \\ \mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{t})\,\mathbf{d}\boldsymbol{t} \end{vmatrix} = \\ = \int \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})\big)\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{t})\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

$$\int \cos 2x\ \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = 2x \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \cdot \int \cos t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \sin t + c = \\ = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + c$$

4.4.8 Určitý integrál

Definice určitého integrálu [7, str. 233]:

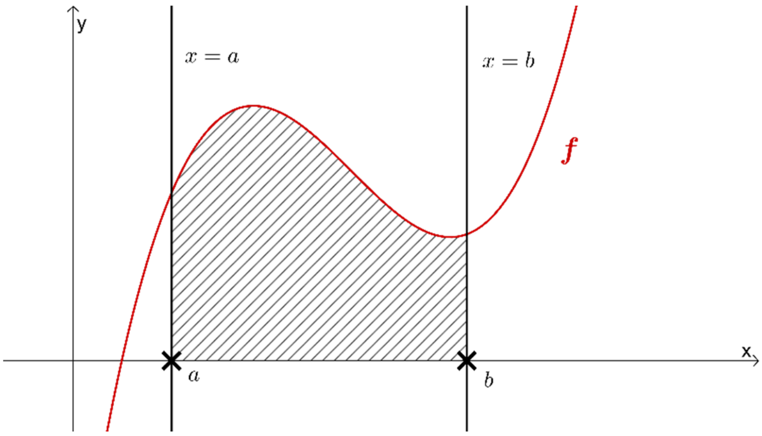
> Nechť $\boldsymbol{F}$ je primitivní funkce k funkci $\boldsymbol{f}$ na intervalu $\boldsymbol{I}$. Rozdíl $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$ funkčních hodnot funkce $\boldsymbol{F}$ v libovolných bodech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce $\boldsymbol{f}$ v mezích od $\boldsymbol{a}$ do $\boldsymbol{b}$ a značí se:
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Hodnota bodu $\boldsymbol{a}$ se nazývá **dolní mez** a hodnota bodu $\boldsymbol{b}$ se označuje jako **horní mez** určitého integrálu.

Výpočet určitého integrálu $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ se provádí podle vztahu:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \Bigg| \quad \int_0^1 e^x\ \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ vyjadřuje obsah plochy pod grafem funkce $f(x)$ ohraničené přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (Obr. 4.25).



Obr. 4.25 Grafické znázornění určitého integrálu funkce f v mezích od a do b, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Hodnota určitého integrálu je rovna vyznačené ploše pod grafem funkce.

V případě záměny horní meze daného určitého integrálu za dolní mez se získá stejná hodnota určitého integrálu, avšak s opačným znaménkem. Platí tedy vztah:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

4.5 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnicí je vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi. Vyskytuje-li se v rovnici pouze první derivace funkce, pak se jedná o diferenciální rovnici 1. řádu. Při řešení diferenciálních rovnic bude první derivace funkce y, y', zapisována v diferenciálním tvaru $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Veličina c v následujících vztazích představuje integrační konstantu, tedy libovolné číslo z množiny $\mathbb{R}$.

Vybrané typy diferenciálních rovnic 1. řádu a jejich řešení:

Diferenciální rovnice typu $\boldsymbol{y' = f(x)}$

Tento typ diferenciálních rovnic se řeší separací proměnných $\boldsymbol{f(x)}$ a $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ (tj. převedením $f(x)$ a $\mathrm{d}x$ na jednu stranu rovnice) a následnou integrací levé a pravé strany rovnice:

Diferenciální rovnice	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)}$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x$
Diferenciální rovnice po separaci proměnných	$\boldsymbol{\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x}$	$\mathrm{d}y = 6x\,\mathrm{d}x$
Naznačená integrace	$\boldsymbol{\int \mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x}$	$\int \mathrm{d}y = 6\int x\,\mathrm{d}x$
Řešení	$\boldsymbol{y = F(x) + c}$	$y = 3x^2 + c$

Diferenciální rovnice typu $\boldsymbol{y' = f(y)}$ pro $\boldsymbol{f(y) \neq 0}$

Tento typ diferenciálních rovnic se řeší separací proměnných $\boldsymbol{f(y)}$ a $\mathbf{d}\boldsymbol{y}$ (tj. převedením $f(y)$ a $\mathrm{d}y$ na jednu stranu rovnice) a následnou integrací levé a pravé strany rovnice:

Diferenciální rovnice	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)}$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$
Diferenciální rovnice po separaci proměnných	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x$
Naznačená integrace	$\boldsymbol{\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int \mathrm{d}x}$	$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x$
Rovnice po integraci	$\boldsymbol{F(y) = x + c}$	$-\frac{1}{y} = x + c$
Řešení		$y = -\frac{1}{x + c}$

Diferenciální rovnice typu $\boldsymbol{y' = f(x)/g(y)}$ pro $\boldsymbol{g(y) \neq 0}$

Tento typ diferenciálních rovnic se řeší separací proměnných, kdy $\boldsymbol{f(x)}$ a $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ se převede na jednu stranu rovnice a $\boldsymbol{f(y)}$ a $\mathbf{d}\boldsymbol{y}$ na druhou stranu rovnice. Řešení se získá následnou integrací levé a pravé strany rovnice:

Diferenciální rovnice	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(y)}}$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-3}{2y+2}$
Diferenciální rovnice po separaci proměnných	$\boldsymbol{g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x}$	$(2y+2)\,\mathrm{d}y = (x-3)\,\mathrm{d}x$
Naznačená integrace	$\boldsymbol{\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x}$	$\int (2y+2)\,\mathrm{d}y = \int (x-3)\,\mathrm{d}x$
Rovnice po integraci	$\boldsymbol{G(y) = F(x) + c}$	$y^2 + 2y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$
Tvar kvadratické rovnice s neznámou y		$y^2 + 2y - \frac{1}{2}x^2 + 3x - c = 0$
Řešení		$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c}$

Lineární diferenciální rovnice typu $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)}$

Tento typ diferenciálních rovnic se řeší ve dvou krocích. Nejprve se diferenciální rovnice řeší bez pravé strany (hledá se tzv. homogenní řešení diferenciální rovnice, y_h). Podle tvaru pravé strany rovnice se následně hledá tzv. partikulární řešení diferenciální rovnice, y_p. Řešením lineární diferenciální rovnice je součet jejího homogenního a partikulárního řešení:

Diferenciální rovnice	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)}$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 6y = 2e^x$
Diferenciální rovnice bez pravé strany	$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = 0}$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 6y = 0$
Homogenní řešení (viz výše)	$\boldsymbol{y_h = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}}$	$y_h = e^{6x} \cdot c_1$
Tvar očekávaného partikulárního řešení*	$\boldsymbol{y_p = c(x)e^x}$	$c(x)e^x - 6c(x)e^x = 2e^x$ $c(x) = -\frac{2}{5}$
Řešení	$\boldsymbol{y = y_h + y_p}$	$y = e^{6x} \cdot c_1 - \frac{2}{5}e^x$

* Tento tvar je specifický podle tvaru pravé strany diferenciální rovnice. Uvedený tvar odpovídá řešenému příkladu. Tato rovnice se zderivuje a dosadí do původní rovnice, čímž se dopočítá hodnota $c(x)$.

4.6 Funkce dvou proměnných

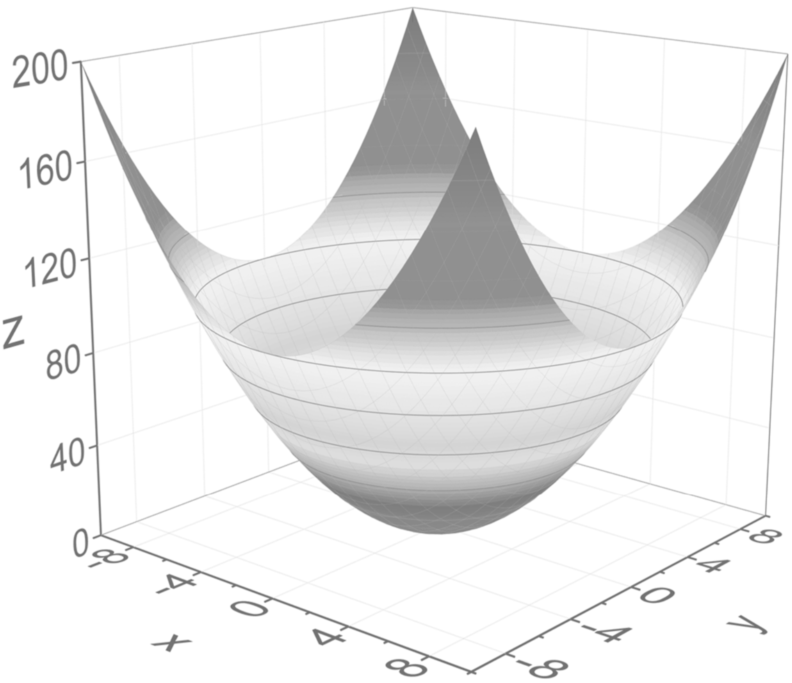
4.6.1 Definice a grafy funkcí dvou proměnných

Funkce dvou reálných proměnných je definována následovně [11, str. 390]:

Nechť je v rovině xy dána množina bodů $[x;\ y]$ – definiční obor D_f. Na této množině je definována **reálná funkce reálných proměnných x, y**, je-li dán předpis, podle kterého každému bodu $[x;\ y] \in D_f$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo z.

Obdobně je možné definovat funkci n proměnných.

Grafem funkce dvou proměnných je plocha. Příklad takového grafu je uveden na Obr. 4.26.



Obr. 4.26 Graf funkce $f(x; y) = x^2 + y^2$.

4.6.2 Parciální derivace

Definice parciální derivace [15, str. 84]:

Parciální derivace funkce více proměnných je **derivace funkce podle jedné z proměnných** za podmínky, že všechny **ostatní proměnné jsou udržovány konstantní.**

Pro funkci dvou proměnných $\boldsymbol{f(x,y)}$ tedy existují dvě parciální derivace:

- parciální derivace funkce f podle proměnné x (y je konstantní): $\boldsymbol{(\partial f/\partial x)_y}$
- parciální derivace funkce f podle proměnné y (x je konstantní): $\boldsymbol{(\partial f/\partial y)_x}$

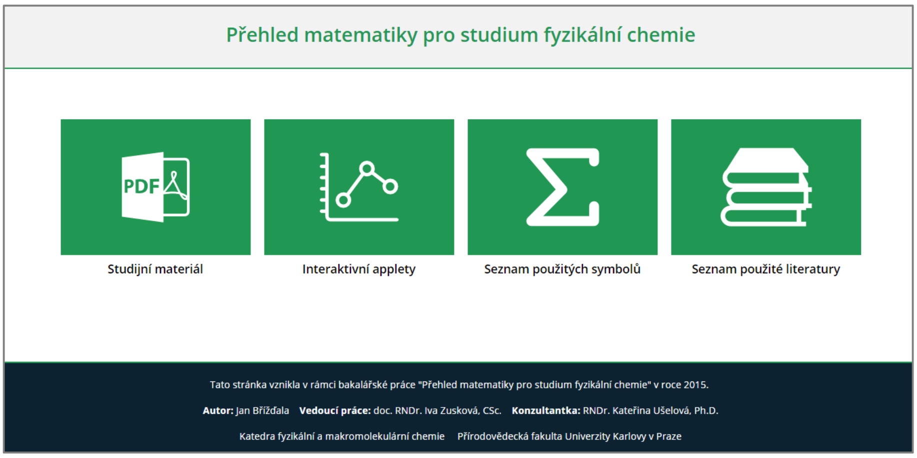
Parciální derivace udává, jak se **mění graf funkce v závislosti na dané proměnné**. Pro úplný (totální) diferenciál funkce dvou proměnných, $\mathrm{d}f$, platí:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \left(\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\right)_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{dx} + \left(\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial y}}\right)_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{dy}$$

Obdobně, jako tomu je u funkcí jedné proměnné, je možné pro vyšetřování průběhu funkcí dvou proměnných využít diferenciálního počtu.

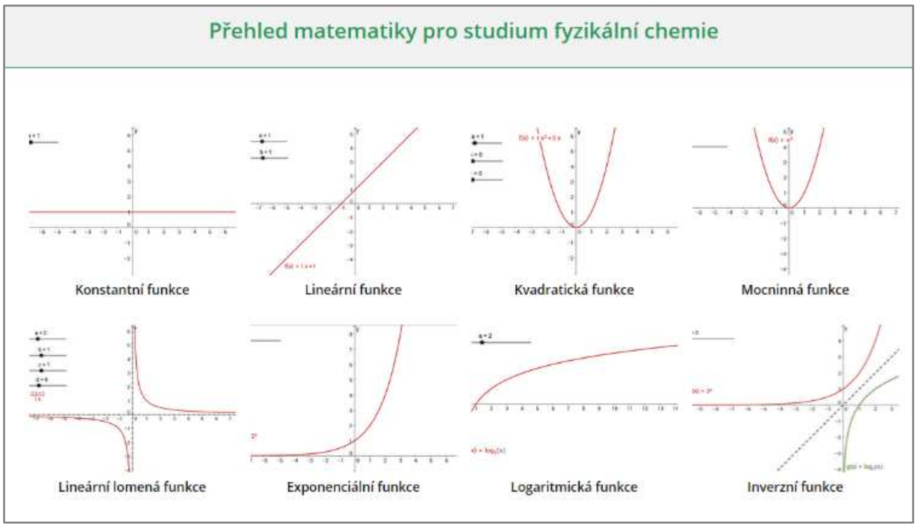
5 Webová verze přehledu

Přehled matematiky, vytvořený v rámci této bakalářské práce, je volně přístupný na webové adrese www.e-chembook.eu/matematika. Tyto stránky byly vytvořeny pomocí programovacích jazyků HTML (HyperText Markup Language) a CSS (Cascading Style Sheets). Úvodní stránka webu je zobrazena na Obr. 5.1.

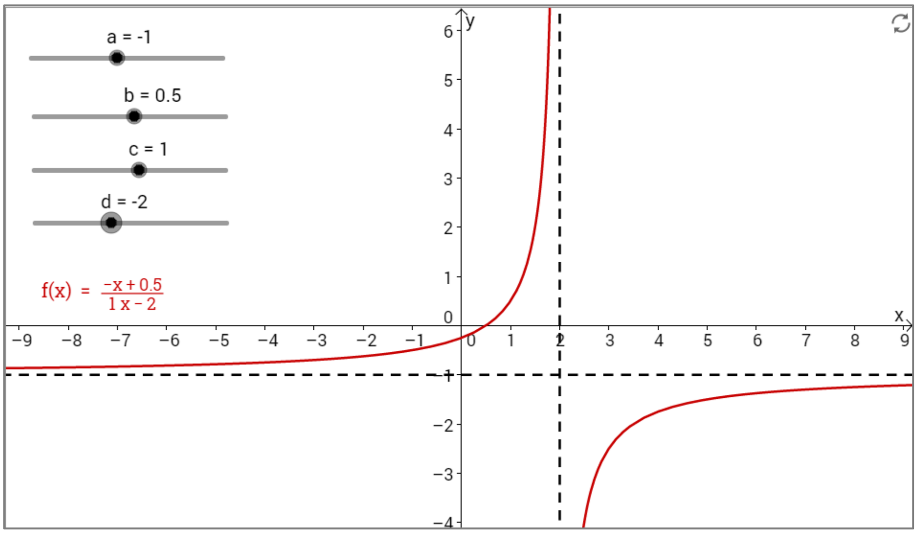


Obr. 5.1 Úvodní stránka webu www.e-chembook.eu/matematika.

Návštěvník webu si může přímo z úvodní stránky otevřít PDF soubor se studijním materiálem, spustit interaktivní applety či zobrazit přehled použitých symbolů a literatury. Vložený PDF soubor s přehledem matematiky je vhodný jak pro tisk, tak pro prohlíženích na počítačích, tabletech či mobilních telefonech. Elektronická verze přehledu obsahuje odkazy na interaktivní applety. Na těchto appletech je možné demonstrovat, jak se mění grafy vybraných typů funkcí v závislosti na jejich funkčních předpisech. Tyto applety byly vytvořeny pomocí volně dostupného programu GeoGebra. Ukázka stránky se seznamem appletů je na Obr. 5.2. Ukázka appletu lineární lomené funkce je na Obr. 5.3.



Obr. 5.2 Stránka se seznamem interaktivních appletů různých typů funkcí.



Obr. 5.3 Ukázka interaktivního appletu s lineární lomenou funkcí. Uživatel si může pomocí posuvníků volit hodnoty koeficientů a, b, c, d v předpisu lineární lomené funkce $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

6 Závěr

V rámci bakalářské práce bylo provedeno orientační šetření mezi studenty, kteří si v akademickém roce 2014/2015 zapsali předmět Fyzikální chemie I (b). Z výsledků šetření vyplynulo, že pro studenty jsou z matematiky obtížné především funkce jedné a více proměnných, diferenciální a integrální počet a diferenciální rovnice. Na základě tohoto zjištění byl vypracován přehled matematiky, ve kterém byla shrnuta matematická teorie potřebná pro studium fyzikální chemie. Do přehledu byly zahrnuty také příklady a obrázky pro lepší pochopení probírané teorie.

Vytvořený studijní materiál je dostupný jako PDF soubor, který je vhodný k tisku i prohlížení. Elektronická verze přehledu obsahuje odkazy na interaktivní applety. Pomocí nich je možné demonstrovat, jak se mění grafy funkcí v závislosti na jejich funkčních předpisech. Vytvořený přehled matematiky je volně dostupný nejen studentům předmětů fyzikální chemie.

Seznam literatury

[1] Charvát, J., Zhouf, J. a Boček, L. *Matematika pro gymnázia - rovnice a nerovnice.* 4. vydání. Praha : Prometheus, 2010. 978-80-7196-362-2.

[2] Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia - Funkce.* Praha : Prometheus, 2014.

[3] Hrubý, D. a Kubát, J. *Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet.* Praha : Prometheus, 1997.

[4] Janeček, F. *Sbírka úloh z matematiky pro SŠ - Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy.* Praha : Prometheus, 2010. 978-80-7196-360-8.

[5] Odvárko, O. *Sbírka úloh pro gymnázia: funkce.* Praha : Prometheus, 1997. 978-80-7196-305-9.

[6] Polák, J. *PŘEHLED středoškolské matematiky.* 6. vydání. Praha : Prometheus, 1995. 80-85849-78-X.

[7] Kubešová, N. a Cibulková, E. *MATEMATIKA - přehled středoškolského učiva.* 2. vydání. Třebíč : Petra Mrákotová - nakladatelství VYUKA.cz, 2011. 978-80-86873-05-3.

[8] Vošický, Z. *Matematika v kostce pro střední školy.* Havlíčkův Brod : Fragment, 2007. 978-80-253-0191-3.

[9] Petáková, J. *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha : Prometheus, 2006. 80-7196-099-3.

[10] Bartsch, H.-J. *Matematické vzorce.* [překl.] Z. Tichý. 4. vydání. Praha : Academia, 2006. 80-200-1448-9.

[11] Rektorys, K. a kol. *Přehled užité matematiky I.* 7. vydání. Praha : Prometheus, 2000. 80-7196-180-9.

[12] Rektorys, K. a kol. *Přehled užité matematiky II.* Praha : Prometheus, 2002. 80-7196-181-7.

[13] Škrášek, J. a Tichý, Z. *Základy aplikované matematiky I.* Praha : SNTL, 1989. 04-544-89.

[14] Kopáček, J. *Matematická analýza nejen pro fyziky I.* Praha : Matfyzpress, 2004. 978-80-86732-25-8.

[15] Atkins, P. a de Paula, J. *Fyzikální chemie.* Praha : VŠCHT Praha, 2013. 978-80-7080-830-6

[16] *Portál středoškolské matematiky.* [Online] Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, 2011. [Citace: 25. května 2015.] http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/.

[17] *MATEMATIKA online.* [Online] Ústav matematiky FSI VUT Brno, 2005. [Citace: 25. května 2015.] http://mathonline.fme.vutbr.cz/.

[18] Krynický, M. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky.* [Online] 2010. [Citace: 25. května 2015.] http://www.realisticky.cz/.

[19] *Matematika.cz.* [Online] Nová média, 2006-2014. [Citace: 25. května 2015.]

[20] Staněk, J. Matematická analýza I - přednáška. *RNDr. Jakub Staněk, Ph.D. - Výuka.* [Online] 2014. [Citace: 18. dubna 2015.] http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanekj/prednaska_final.pdf.

[21] Richter, J. Funkce. *Portál středoškolské matematiky.* [Online] Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, 2011. [Citace: 18. dubna 2015.] http://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/funkce/.

[22] Ústav matematiky FSI VUT Brno. MATEMATIKA online - Diferenciál a Taylorův polynom. [Online] [Citace: 25. května 2015.] http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=918.